

# 半静态回插细分方法\*

张宏鑫<sup>1,2</sup>, 王国瑾<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>(浙江大学, CAD&CG 国家重点实验室, 浙江杭州 310027);

<sup>2</sup>(浙江大学数学系, 浙江杭州 310027)

E-mail: zhx@math.zju.edu.cn; wgj@math.zju.edu.cn

http://www.cad.zju.edu.cn

**摘要:** 本文根据传统静态细分方法的不足点, 提出一类新颖的半静态回插细分方法. 我们结合了统一的细分框架、半静态控制和回插补偿三者的优势, 基于细分算子的观点, 分别给出了曲线和曲面情况的细分规则, 并对其极限性质做出了讨论. 按照本文方法, 可以在不改变控制顶点的情况下, 构造出从逼近到插值控制顶点的一系列曲线曲面. 在曲面情况, 引入网格顶点和连接边的方向标注, 以生成具有整体方向性的光顺曲面. 由于本文方法基于符号表示, 易于实现与扩展, 适合于计算机动画造型和工业原型设计.

**关键词:** 曲面造型; 细分曲面; 插值方法; 曲线离散

**中图法分类号:** TP391      **文献标识码:** A

90年代以来, 细分曲面造型技术得到迅猛发展. 细分曲面作为一种曲面离散方法, 结合了多边形造型和 NURBS 样条造型的优点, 算法简洁稳定, 可适用于任意拓扑网格, 因而在计算机动画造型, CAD 和有限元分析等领域都得到广泛应用. 根据生成规则的差异, 细分曲面可以分为若干类型. 最主要的细分曲面有基于张量积推广的 Catmull-Clark<sup>[1]</sup>和 Doo-Sabin 细分曲面<sup>[2]</sup>, 适用于三角网格的 Loop 细分曲面<sup>[3]</sup>, 以及具有插值能力的蝶形细分曲面<sup>[4][5]</sup>. 研究者利用细分方法的对称性, 基于离散傅立叶变换对这些细分曲面的极限性质进行了分析<sup>[2][6-10]</sup>. 然而, 传统细分曲面存在以下的不足之处:

- (1) 静态的细分参数使得控制网格给定时, 极限曲面形状就随之固定, 毫无进一步调整的余地;
- (2) 一些重要的形状特征如旋转面, 无法给予合理的精确表示, 成为其在工业设计应用中的障碍;
- (3) 应用基于样条的逼近方法<sup>[1][2][3]</sup>存在收缩现象, 不利于插值; 而另一方面插值方法<sup>[4][5]</sup>光顺性不佳;
- (4) 众多方法缺少统一, 不利于系统集成和向高次或高维等一般情况的推广.

为克服这些局限性, DeRose 等人<sup>[11]</sup>引入了顶点和边的标注; Qin 等人<sup>[12]</sup>在网格中引入物理特性, 提出了动态细分曲面模型, 两者部分地解决了不足之处(1); 同时, Sederberg 和 Zheng 等人<sup>[13]</sup>提出 NURSS 模型用来解决不足之处(1)和(2). 但以上方法的实现仍较复杂或者交互不够直观. 此后, Morin 等人<sup>[14]</sup>基于 C-B-样条方法<sup>[15]</sup>提出了旋转细分曲面; 本文作者基于核函数概念引入非线性方法独立提出了半静态细分算法<sup>[16]</sup>.

目前, 针对(3)和(4)的工作已经成为细分曲面的一个研究重点. 本文的目的就是在这方面作一个积极的探索. 首先, 我们看到, 正由于(3)的原因, 利用文[14][16]的方法构造旋转面并插值控制顶点时, 必须进行复杂的顶点反求, 很不方便. 受 Maillot 等人<sup>[17]</sup>的静态细分法的启发, 本文通过在基于样条逼近的细分方法之后追加回插补偿的步骤, 可产生插值控制顶点的细分曲面而避免求解方程组, 并可在逼近和插值之间进行调和, 利于交互. 其次, 我们看到, 已有的连续性分析表明, 单纯静态的回插细分格式如经典的四点法曲线, 为达到较高的连续阶数, 调节范围相当小且形状相对扁平; 而半静态细分允许每次选取不同参数, 极限性质

\* 收稿日期: 2002-02-28; 修改日期: 2002-05-28

基金项目: 国家自然科学基金 No.60173034; 国家重点基础研究 973 项目 No.G1998030600.

作者简介: 张宏鑫, 男, 浙江杭州人, 1975年生, 博士研究生. 主要研究领域为几何造型, 细分曲面, 计算机动画. 王国瑾, 男, 浙江绍兴人, 1944年生, 教授, 博士生导师. 主要研究领域为几何造型, 曲线曲面逼近与转化, 计算机图形学.

只取决于核函数在零点附近的性质, 灵活性更大. 然而, 已有的半静态方法一般较难写出曲面极限的具体表达式, 用于插值场合较困难, 因此半静态回插补偿细分是势所必然的了.

针对不足之处(4), Zorin 等人<sup>[18]</sup>提出一类基于四边片的统一算法框架, 揭示了的细分方法都可分解为顶点分裂操作和若干次对偶平均操作的原理, 这与均匀 B-样条的卷积定义正好相吻合. 由此我们想到, 一个好的细分曲面构造方法应当是一系列细分算子共同作用的结果, 这里细分算子应当是向上采样, 卷积平均和回插补偿三种原子操作的组合. 而且, 由于原子操作实行简单, 支撑集较小, 可使系统简洁, 稳定性提高. 再者, 按照面向对象的设计思想, 新的细分规则也非常容易得到扩充.

正是基于以上的考虑, 本文把细分统一实现思想、半静态控制和回插补偿三者的优势有机地结合, 以细分算子的观点, 提出了一类统一的半静态回插细分方法. 本文的第 1 节和第 2 节以算子形式讲述半静态回插细分曲线/曲面的构造方法, 第 3 节是极限性质的分析. 第 4 节给出算法实现, 算法的进一步扩展以及应用实例, 第 5 小节是结论和未来的工作展望.

## 1 半静态回插细分曲线

根据 B-样条的卷积定义可导出如下原理: 均匀 B-样条曲线的中点插入离散方法可等价地分解为线性插值以及相继的若干邻域平均的步骤. 基于该原理的推广, 我们得出了一类半静态曲线离散方法. 该方法的第一步是中点线性插值, 我们称之为**向上采样(up-sampling)算子** $U: \{P_i\} \mapsto \{P'_i\}$

$$P'_{2i} := P_i; P'_{2i+1} := \frac{1}{2}(P_i + P_{i+1}) \quad (1)$$

这里  $\{P_i\}$  初始控制顶点列,  $\{P'_i\}$  是新顶点列. 如同文献[17], 符号“:=”表示并行赋值操作; 在串行实现时可以先建立一个临时顶点数组, 执行操作后统一赋值.

该方法的第二步是  $m$  步邻域平均, 由于这时新老控制多边形之间形成边-点对应, 我们称之为**对偶平均算子** $D_l(f_l(\cdot); \alpha): \{P'_i\} \mapsto \{P''_i\}$

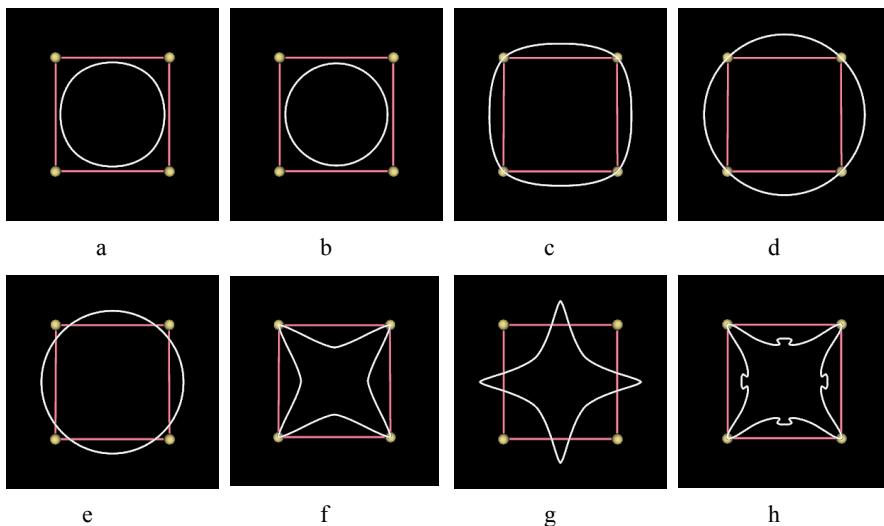


Fig.1 Semi-stationary push-back subdivision curves

图 1 半静态回插细分曲线的丰富表现能力

$$\begin{cases} P'_{2i} := \frac{f_i(\alpha_i)}{1+f_i(\alpha_i)} P'_{2i} + \frac{1}{1+f_i(\alpha_i)} P'_{2i+1}, \\ P'_{2i+1} := \frac{1}{1+f_i(\alpha_i)} P'_{2i+1} + \frac{f_i(\alpha_i)}{1+f_i(\alpha_i)} P'_{2i+2}, \quad 0 < i \leq m. \end{cases} \quad (2)$$

其中  $f_i$  被称为核函数用于引入非线性,  $\alpha_i$  是其参数. 出于算法效率和扩展性之间的权衡, 以下只考虑当  $l > 1$  时  $f_i \equiv 1$  的情况. 函数  $f_i = f(\alpha)$  取在零点附近一阶连续的实函数, 且  $|f'(0)| < 1$ .

可以观察到, 经过相继两次  $D_l(f_i(\bullet), \alpha)$  作用, 并用指标平移  $R: \{P_i\} \mapsto \{P'_i := P_{i+1}\}$  调整之后, 保持了顶点对应  $P_i \leftrightarrow P'_i$ , 我们称这一组合是卷积平均算子, 记为  $C$ . 标记  $S_h(f; \alpha_h, m) = D_m D_{m-1} \dots D_1 U$ , 是对空间控制多边形反复作用的细分算子  $S_h$ , 并每次更新  $\alpha_{h+1} := \alpha_h / 2$ , 这就给出了曲线的半静态细分方法. 当  $f \equiv 1$  它就是均匀 B-样条曲线中点离散方法 (图 1-a); 取  $f(\alpha) = \cos(\alpha/2)$  就是  $m+1$  次 C-B-样条曲线, 当控制多边形为正  $K$  边形时, 取  $\alpha_0 = 2\pi/K$  时可得到圆周 (图 1-b).

必须指出, 这种细分方法是逼近构造, 迭代次数越多, 收缩越明显. 为纠正这种收缩现象, 作用  $m = 2k$  次对偶平均算子之后, 利用顶点对应, 我们增加一种操作, 将偶数顶点位置以某种程度推回到初始对应顶点, 并对奇数顶点也作相应调整. 我们把以上操作称为回插补偿(Push-back)算子  $P(\omega(\bullet); \alpha, \delta): (\{P_i\}, \{P'_i\}) \mapsto \{P''_i\}$

$$\begin{cases} \Delta_i := \delta(P_i - P'_{2i}) \\ P'_{2i} := P'_{2i} + \Delta_i \\ P'_{2i+1} := P'_{2i+1} + \frac{\omega(\alpha)}{2} [\Delta_i + \Delta_{i+1}] \end{cases} \quad (3)$$

其中  $\delta$  是回插因子,  $\omega(\alpha)$  是补偿函数. 于是, 形如  $S(f, \omega; \alpha, \delta, m) = P D_{2k} D_{2k-1} \dots D_1 U$  的算子就定义了半静态回插细分曲线算法, 算法流程如图 2 所示. 当  $\delta = 0$  时, 算子  $P$  不发生作用;  $\delta = 1$  时形成插值算法. 容易验证当控制顶点在同一直线上, 极限曲线也是直线段; 当  $f(\alpha) \equiv 1, \omega(\alpha) \equiv \omega_0, k = 1$  且  $\delta = 1$  时, 它就生成标准的四点法插值曲线 (图 1-c). 注意到它无法精确的表示椭圆和圆周, 因此我们构造插值 C-B-样条, 可得出

**定理 1.** 设控制多边形为平面正  $K$  边形, 取  $f(\alpha) = \cos(\alpha/2)$  和  $\omega(\alpha) = 1/\cos(\alpha/2)$ , 当  $\alpha_0 = 2\pi/K$  时极限曲线是圆周 (参阅图 1-d, 其中  $\delta = 1.0$ ; 参阅图 1-e, 其中  $\delta = 0.8$ ; 证略).

此外, 在最初几次细分中利用负的组合系数构造线性外插, 可产生特殊形状, 该类情形适合于平面艺术设计 (图 1-f,g,h 的参数见附录).

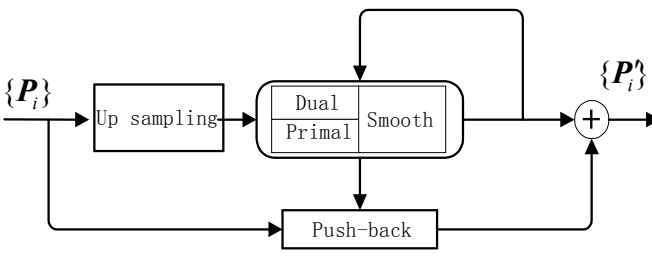


Fig.2 Semi-stationary push-back subdivision flow chart  
图 2 半静态回插细分流程

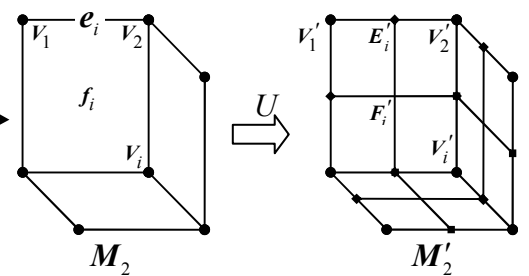


Fig.3 Mid-point linear interpolation on meshes  
图 3 网格的中点线性插值

## 2 半静态回插细分曲面

本节介绍基于四边形网格的细分曲面, 它是张量积曲面的推广, 因此图 2 所示的离散流程仍旧适用. 曲面情况离散对象是伪二维流形网格. 这时, 向上采样算子  $U: M_2 \mapsto M'_2$  对应于空间网格的中点线性插值(图 3). 其中初始网格  $M_2$  中的顶点  $V_i$ , 作用  $U$  算子之后, 对应生成新顶点  $V'_i$ ; 同时每条边  $e_i$  对分成两段, 对应

生成新边点  $E'_i$ ; 每个面  $f_i$  对应生成新面点  $F'_i$ . 显然, 作用一次  $U$  算子之后, 新网格  $M'_2$  中每个面只有四个顶点. 用  $|\bullet|$  表示集合包含元素个数. 于是向上采样算子  $U: M_2 \mapsto M'_2$  的计算公式是

$$V'_i := V_i; E'_i := \frac{1}{2}(V_1 + V_2); F'_i := \frac{1}{|f_i|} \sum_{V \in f_i} V; \quad (4)$$

其中  $V_1, V_2$  是  $e_i$  的顶点.

为具有回插效果, 将  $PD_{2k}D_{2k-1} \dots D_1U$  型细分方法转化为  $S = PC_kC_{k-1} \dots C_1U$ . 在曲面情况, 对网格  $M'_2$  上一点  $P$ , 记与其有边相连的顶点集是  $Edges(P)$ , 与其同在一个拓扑面但不直接相连的对角顶点集是  $Corners(P)$ , 卷积算子  $C_i: M'_2 \mapsto M'_2$  等价于对网格的进行 Laplace 算子磨光

$$C_i := \frac{f_i^2 V_i + f_i(E_{i,1} + E_{i,2}) + F_i}{(1 + f_i)^2}; P := \frac{1}{|Corners(P)|} \sum_{i \in \mathbb{Z}_n} C_i; \quad (5)$$

这里  $V_i, E_{i,1}, E_{i,2}$  和  $F_i$  分别为环绕顶点  $P$  旋转的第  $i$  个四边形面上的新顶点, 两个新边点和新面点; 辅助顶点  $C_i$  对应于四个顶点的线性平均, 我们称之为环中心(Loop Center). 在  $C_kC_{k-1} \dots C_1U$  作用之下, 新老网格之间形成顶点-新顶点, 边-新边点和面-新面点的对应. 针对二维情况, 回插补偿算子  $P(\omega(\bullet); \alpha, \delta): (M_2, M'_2) \mapsto M'_2$  具体步骤是

(1) 计算新旧顶点的差异:

$$\Delta V_i = \delta(V_i - V'_i); \quad (6)$$

(2) 对新顶点作回插:

$$V'_i := V'_i + \Delta V_i; \quad (7)$$

(3) 根据与其相连的新顶点的变化, 对新边点作补偿:

$$E'_i := E'_i + \frac{\omega(\alpha)}{2}(\Delta V'_1 + \Delta V'_2); \quad (8)$$

(4) 根据周围新顶点的变化, 对新面点作补偿:

$$F'_i := F'_i + \frac{\omega^2(\alpha)}{|Corners(F'_i)|} \sum_{V' \in Corners(F'_i)} \Delta V'_i. \quad (9)$$

至此, 组合算子  $S_h(f, \omega; \alpha_h, \delta, k) = PC_kC_{k-1} \dots C_1U$  以及公式(4)-(9)就定义了一套半静态的回插细分规则(如图 4 所示). 容易验证, 文献[20]的基于四边片的插值细分方法, 正是我们的半静态回插细分规则中取  $k=1, \delta=1, f(\alpha) \equiv 1$  的特例; 经典的 Catmull-Clark 细分算法就是本规则中  $k=1, \delta_v = (N-4)/N, f \equiv 1, \omega \equiv 0$  的特例, 其中  $N$  为顶点  $V$  的连接度;  $\delta=0$  相当于把 Zorin<sup>[18]</sup>Primal 类型方法作半静态推广.

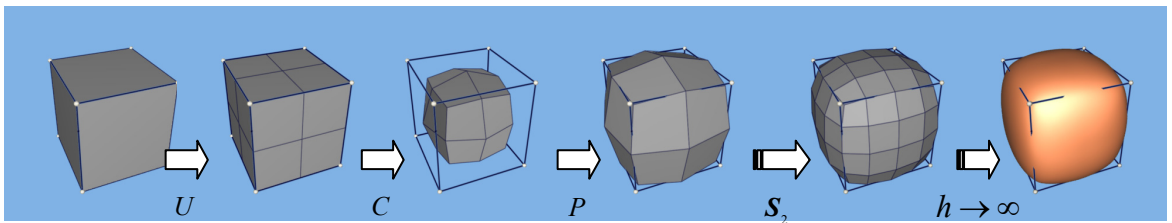


Fig.4 Semi-stationary subdivision surface generation process

图 4 曲面半静态回插细分

## 2.1 经纬标注

曲面(例如图5)往往是具有方向性的. 比如张量积曲面可以在两个参数方向上取不同的基函数以产生方向特性. 然而, 细分曲面作为张量积曲面的推广, 由于传统细分曲面采用对称的邻域平均规则, 缺乏此特性. 直接按照以上方法, 为构造生成类似旋转曲面的效果, 在网格形状变化比较大时, 回插补偿过多, 造成极限曲面的形状较不光滑(如图7例子). 为此, 我们对网格上的顶点和边进行属性标注, 用经向和纬向表示不同特性方向, 并修改的回插补偿规则. 该改进方法适合于解决具有方向性的旋转曲面, 以及 sweeping 和 skin 曲面的细分曲面方法表示问题. 在细分过程中, 具体标注与更新规则如下(图6):

- (1) 在初始网格的边上标注经纬线属性;
- (2) 生成新边点时, 经线边上的边点标注为**经线边点**, 纬线边上的边点标注为**纬线边点**, 新生成的边继承原始边的经纬属性;
- (3) 连接边点和面点生成新面时, 经线边点和面点的连接边标注为纬线边, 纬线边点和面点的连接边标注为经线边.

为生成局部的旋转面, 首先把控制网格在指定区域内围成桶状, 并且在与旋转轴垂直方向上构造若干层正  $m$  边形 ( $m=3,4,\dots$ ). 然后, 在母线方向标注经线边, 在旋转方向标注纬线边. 在细分过程中, 首先选择常数作为补偿函数, 执行初始的回插补偿步骤; 然后再沿纬线方向, 对新纬线边点和新面点按照曲线细分规则进行更新. 如此修改算法后, 可得到光滑的曲面(如图7-c). 这样利用边的经纬属性标注, 我们的细分方法产生了具有各向异性的细分曲面, 并避免了使用更加致密的控制网格.

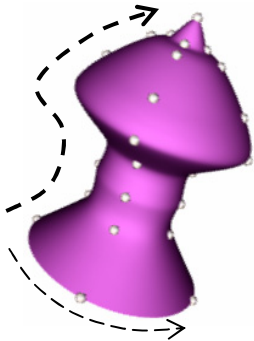


Fig.5 Directions of surfaces  
图5 曲面的方向性

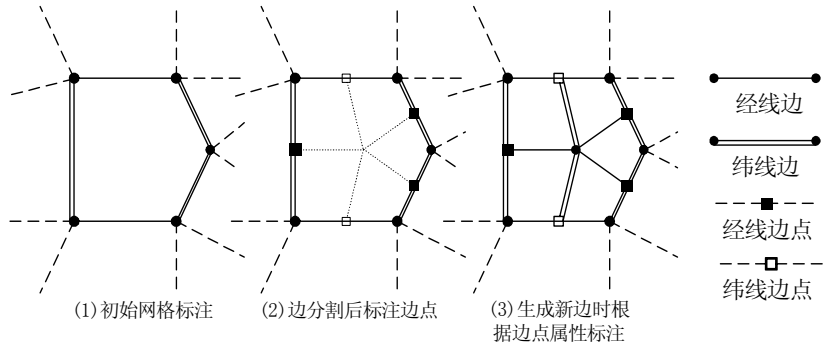


Fig.6 The Longitude-Latitude tag rules of edges  
图6 边的经纬标注规则

## 2.2 边界规则

由于顶点对应和算法被高度地分解, 相互独立开来, 边界的特殊处理变得很简洁. 当边界顶点被标注为角点, 用卷积光滑算子作用和回插补偿时, 它的位置保持不动. 对于一般的边界顶点, 沿网格边界, 采用第2节中的曲线细分规则. 这样就可以保证在边界产生相应的细分曲线(如图8).

## 3 收敛性质

区别于传统的细分规则, 本文采用的细分规则在光滑平均和回插补偿时, 其系数以一定规律变化. 对于曲线和曲面的情况, 我们都抽象地用形如  $PD_k D_{k-1} \dots D_1 U$  的原子操作组合来构造细分规则, 并称其为细分算子  $S(f, \omega; \alpha, \delta, k)$ . 它的性质由核函数  $f(\alpha)$ , 补偿函数  $\omega(\alpha)$ , 初始参数  $\alpha$  以及回插因子  $\delta$  决定. 当函数  $f(\alpha) \equiv C$  和  $\omega(\alpha) \equiv \omega_0$  时, 它就退化为静态方法.

由于篇幅所限, 我们只能通过特例来说明极限性质的分析方法. 对于第 2 节中定义的曲线细分算子  $S_h(f, \omega; \alpha_h, \delta, k): \{P_i\} \mapsto \{P'_i\}$ , 当  $k=1$  时, 由公式(1)-(3)得出新老顶点的对应关系如下:

$$\begin{pmatrix} P'_{2i-2} \\ P'_{2i-1} \\ P'_{2i} \\ P'_{2i+1} \\ P'_{2i+2} \end{pmatrix} = S_h \begin{pmatrix} P_{i-2} \\ P_{i-1} \\ P_i \\ P_{i+1} \\ P_{i+2} \end{pmatrix}, S_h = \frac{1}{8(1+f)} \begin{pmatrix} 2-2\delta & 4(1+2f+\delta) & 2-2\delta & 0 & 0 \\ -\delta\omega & 4(1+f)+\delta\omega & 4(1+f)+\delta\omega & -\delta\omega & 0 \\ 0 & 2-2\delta & 4(1+2f+\delta) & 2-2\delta & 0 \\ 0 & -\delta\omega & 4(1+f)+\delta\omega & 4(1+f)+\delta\omega & -\delta\omega \\ 0 & 0 & 2-2\delta & 4(1+2f+\delta) & 2-2\delta \end{pmatrix}. \quad (10)$$

可以看到, 细分规则  $S_h$  与这个矩阵一一对应, 所以我们将矩阵也标记为  $S_h$  而不加区分. 事实上, 对于  $\forall k \in \mathbb{N}$ , 细分规则的极限性质与具体的顶点选取无关 (假设没有重节点), 只与细分矩阵的特征结构有关. 极限曲线上控制顶点对应的极限位置及其一阶连续性可以通过分析矩阵乘积  $T_h = S_h S_{h-1} \dots S_1$  的极限得到. 作为文献[19]中重要结论的推广, 我们有

**定理 2** 当  $f(\alpha) \equiv f > 0, -2 < \omega(\alpha) \equiv \omega < 2, 0 \leq d \leq 1$  且  $k=1$  时, 按公式(1)-(3)定义的曲线静态细分规则收敛. (参见附录)

同样, 我们可以写出曲面情况下用局部的新老顶点的对应关系构造出来的细分矩阵<sup>[2][6-10][18]</sup>, 并分析其局部极限性质. 进一步我们发现, 半静态细分与其对应的静态细分 (即当  $\alpha \equiv 0$  时) 之间有以下关系.

**定理 3 (半静态扰动定理)** 设半静态细分算子序列为  $\{S'_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ , 并设它所对应的静态细分算子  $S$ . 如果  $S$  定义的细分方法  $T$  一致收敛, 且细分矩阵满足

$$\|S'_h - S\| \leq c\gamma^h \quad (11)$$

其中  $c > 0, 0 < \gamma < 1$ , 则由  $\{S'_h\}_{h \in \mathbb{N}}$  定义的半静态细分方法  $T'$  也收敛.

**证.** 记  $T_m = S^m, T_{m,n} = S^{m-n+1}, T'_{m,n} = S'_m S'_{m-1} \dots S'_n$ . 由假设, 细分方法  $T$  收敛, 所以矩阵范数  $\|T_{m,n}\|$  有界, 即存在常数  $C_1 > 0$  使得对任意的自然数  $m, n$  有  $\|T_{m,n}\| = \|T_{m-n+1}\| = \|S^{m-n+1}\| < C_1$ . 于是,  $\forall m > N \in \mathbb{N}$  我们有以下的估计式:

$$\begin{aligned} \|T'_{m,N} - T_{m,N}\| &= \|T'_{m,N+1} S'_N - T_{m,N} S\| \\ &\leq \|T'_{m,N+1} S - T_{m,N+1} S\| + \|T'_{m,N}\| \|S'_N - S\| \\ &\leq \|T'_{m,N+2} S^2 - T_{m,N+2} S^2\| + \|T'_{m,N+1}\| \|S'_{N+1} - S\| \|S\| + \|T'_{m,N}\| \|S'_N - S\| \\ &\leq \dots \\ &\leq \sum_{i=1}^{m-N} \|T'_{m,N+i}\| \|S'_{N+i} - S\| \|S^i\| + \|T'_{m,N}\| \|S'_N - S\| \leq C_1 \sum_{i=0}^{m-N} \|T_{m,N+i}\| \gamma^{N+i}. \end{aligned}$$

由归纳法可知  $\|T'_{m,N}\| \leq C_2$  即矩阵有界, 并且存在常数  $C_4 > 0$ , 使得

$$\|T'_{m,N} - T_{m,N}\| < C_3 \gamma^N \frac{1 - \gamma^{m-N+1}}{1 - \gamma} < C_4 \gamma^N. \quad (12)$$

这样对任意  $m, n > N \in \mathbb{N}$  可得

$$\begin{aligned} \|T'_m - T'_n\| &= \|T'_{m,N}T'_{N-1} - T'_{n,N}T'_{N-1}\| \leq \|T'_{m,N} - T'_{n,N}\| \|T'_{N-1}\| \\ &\leq (\|T'_{m,N} - T_{m,N}\| + \|T_{m,N} - T_{n,N}\| + \|T'_{n,N} - T_{n,N}\|) \|T'_{N-1}\| \\ &\leq 2(C_2\gamma^N + \|S^{m-N+1} - S^{n-N+1}\|)C_4. \end{aligned}$$

由收敛性可知  $\{S^h\}_{h \in \mathbb{N}}$  是柯西序列, 即当  $m, n \rightarrow \infty$  时  $\|S^m - S^n\| \rightarrow 0$ , 从而推出  $\|T'_m - T'_n\| \rightarrow 0$ . 证毕.

以上定理表明, 随着作用次数的增加, 如果半静态细分规则与某一收敛的静态细分规则越来越接近, 则前者局部性态与后者等同, 而与初始几次的细分参数无关. 利用此充分条件, 我们可以借助于相应的静态细分规则, 对半静态细分规则的局部极限性质进行评判. 在本文中我们的半静态规则满足公式(11), 再对照定理 2, 3 可得到曲线半静态细分规则的极限性质.

类似地可以证明曲面情况. 由于在正则区域, 即顶点连接度为 4 的区域, 细分曲面等价于第二节中细分曲线的张量积, 所以此时细分曲面的一阶连续性与曲线情况等同. 在顶点连接度不是 4 的奇点附近, 细分曲面的一阶连续性需要特殊考虑<sup>[6-9]</sup>. 按文献中[8]的结论可知, 静态细分曲面的一阶连续条件, 主要通过分析由细分规则导出的细分矩阵的特征值结构来得到. 如果细分矩阵的副主导特征值的几何重数和代数重数都是 2, 且其诱导的特征映射<sup>[8][9]</sup>是正则单射的, 则细分曲面是一阶几何连续的. 基于定理 3 和相应的实验结果, 可知我们的半静态细分算法, 与对应的静态细分算法具有相同的连续性性质.

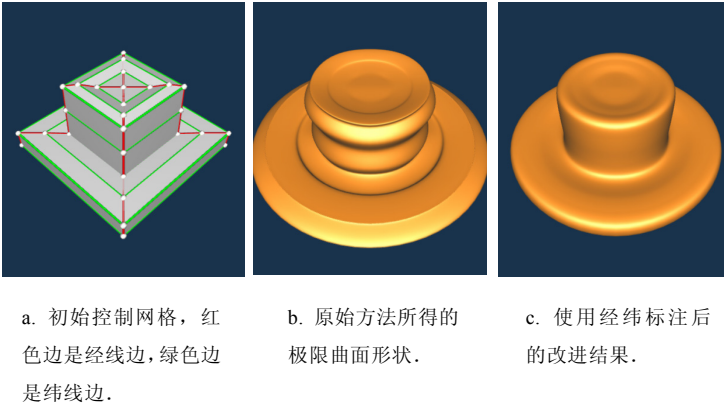


Fig.7 Improving the fairness by Longitude-Latitude tags

图 7 通过经纬标注改善极限曲面的光顺性

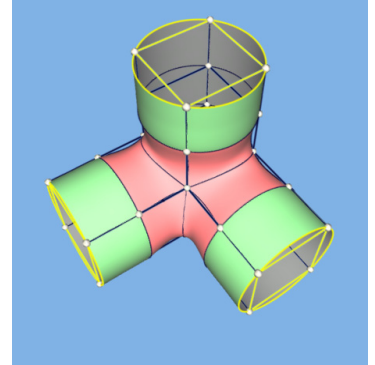


Fig.8 Blending of pipe surfaces

图 8 管道曲面过渡

## 4 实验结果与讨论

本文提出的方法非常容易实现. 我们使用 C/C++, 在普通 PIII 微机 Win2000 平台下实现了全部算法. 本文所有曲线曲面例子, 均使用我们的实验细分造型系统生成. 在我们的实验中, 对曲线情况, 直接选用数组结构表示控制顶点; 对曲面情况, 使用改进的半边数据结构. 我们对每个基本算子构造了类, 而核函数和回插函数利用 C/C++语言中的回调函数技术加以实现.

### 4.1 实验结果

为避免图 7 所示不光顺情况, 图 8 和 9 均采用改进算法. 图 8 是利用本文方法构造的管道曲面及其过渡曲面, 其中绿色部分是圆柱管道, 红色曲面是过渡曲面. 因本文细分方法可在插值和逼近之间调节, 管道半径根据定理 1 可结合横截面的正多边形和回插因子灵活控制, 过渡部分通过控制网格和参数来调整, 给此类应用带来方便. 该例中沿管道旋转方向被标注为纬线边.

图9是控制网格(图9-a)之下,细分曲面在函数和参数变化时的变形情况(按表1选取函数和参数).例子表明,用户可通过调整函数来控制极限区面的光顺度,与初始网格的接近程度,以及利用函数的特性生成复杂的规则形状.值得注意的是,为达到如图9-d的接近效果,使用标准的Catmull细分方法<sup>[1]</sup>所需要的控制网格顶点数将是本文方法的3~4倍.原因是半静态细分已将曲面的部分特性和细节转换为核函数和回插函数形式,减少了数据的存储.

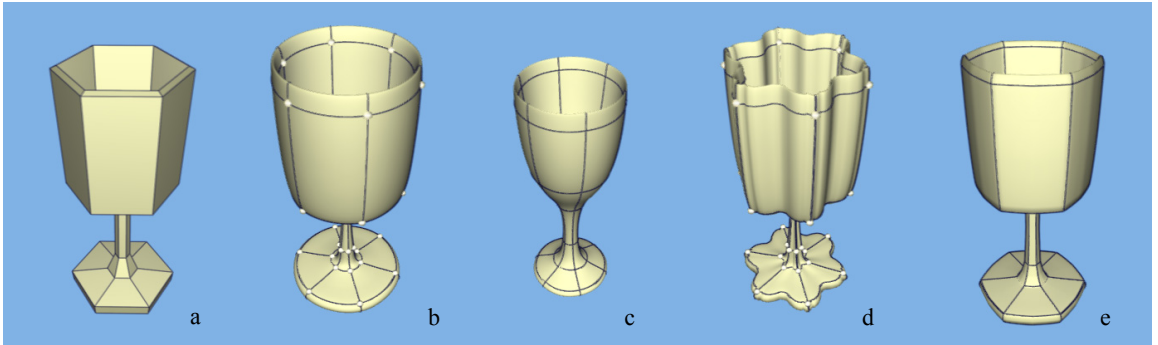


Fig.9 In a same control mesh, the deformations of subdivision surfaces based on parameter changing

图9 相同控制网格下, 细分曲面基于参数改变的变形情况

Table.1 Typical functions and parameters used in subdivision surface in Fig.9

表1 在图9中细分曲面使用的典型函数与参数

编号	核函数 $f$	补偿函数 $\omega$	初始参数 $\alpha$	回插因子 $\delta$	细分规则 $S_h$
b	$\cos(\alpha/2)$	$1/\cos(\alpha/2)$	$\pi/6$	1.0	PCU
c	$\cos(\alpha/2)$	$1/\cos(\alpha/2)$	$\pi/6$	-0.1	PCU
d	$\cos(\alpha/2)$	1.0	20	1.0	PCU
e	$10.0\cos(\alpha/2)$	1.0	$\pi/4$	0.8	PCU

#### 4.2 算法推广

首先是符号表示法. 基于算子的细分规则, 有利于造型系统来使用形式符号, 灵活有效地记录曲线曲面的离散造型过程. 更一般地, 一个离散方法均可以展开表示为一个符号串  $a_1 a_2 \dots a_n \dots (a_i = \{U, D, C, P\})$ , 对算法的修改相当于符号的插入, 删除以及相应参数的调整. 这样, 用户可以根据需求灵活地定制出相应的离散规则. 例如, 本文第2, 3节中介绍的细分算子相当于一个循环的符号序列  $(UC \dots CP) \dots (UC \dots CP) \dots$ . 基于符号表示的方法, 可推广为  $UUCPD(UC) \dots$  之类的一般离散方法. 这样, 传统细分曲面必须每次取相同拓扑剖分模式和达到相同几何光滑次数的约束就被打破, 细分方法的表示能力可以变得很丰富. 值得注意的是, 符号表示法所用的存储很小, 与维数无关, 适于向高维情况推广.

其次是对原子操作的修改. 本文定义的  $U$  算子是对分加密采样, 可以仿照文献[17]采用  $d$  等分网格加密规则, 以便于控制网格复杂性的增加. 扰动定理的证明过程表明, 在同一细分的拓扑剖分模式之下, 只要相对于静态方法的扰动随着次数增加而衰减, 则收敛性质是可以得到保证的. 作为半静态系数选取规则的推广, 可按照公式(11)的要求, 通过随机摄动算子  $D$  和  $P$  中的系数, 以生成更接近真实世界的形体.

第三, 在本文中我们隐含地假设了在整个细分结构使用单一的  $(f, \omega; \alpha, \delta, m)$ , 一种自然的推广是为每个顶点标注各自属性, 并且核函数和补偿函数使用不同的参数, 在向上采样时通过邻域平均进行属性的调整. 另

外, 本文第 3 节提出方法是基于张量积和基于四边形面片的曲面细分规则, 稍加修改还可应用于三角细分曲面的情况.

## 5 结论与未来工作

本文有机地结合了细分统一实现思想、半静态控制和回插补偿三者的优势, 以细分算子的观点, 提出了一类统一的半静态回插细分曲线曲面构造方法. 它包含了许多现有的细分方法, 并有更强的表示能力. 我们通过经纬标注引入了细分曲面的方向特性. 理论分析和数据实验表明: 使用半静态细分, 可以获得更大的灵活性和使用较稀疏的控制网格, 优于原静态细分方法. 本文方法适用于动画生物造型和工业原型设计; 在理论上也有很大的发展潜力. 我们将在以后的工作中, 对函数的选取原则, 以及高维方法和随机扰动等各种推广作深入分析和讨论.

**致谢** 感谢在本文撰写过程中与汪国昭教授、杨勋年副教授和吕勇刚博士进行的有益讨论, 以及不具名的专家评委所提供的宝贵评审意见.

### References:

- [1] Catmull, E. and Clark, J., Recursively Generated B-Spline Surfaces on Arbitrary Topological Meshes, *Computer Aided Design*, 1978, 10(6):350~355.
- [2] Doo, D. and Sabin, M. Behaviour of recursive division surfaces near extraordinary points. *Computer Aided Design*, 1978, 10(6):356~360.
- [3] Dyn, N., Levin, D., and Gregory, J. A., A butterfly subdivision scheme for surface interpolation with tension control, *ACM Transactions on Graphics*, 1990, 9(2): 160~169.
- [4] Loop, C., Smooth subdivision surfaces based on triangle, Master's thesis. Dept Math, Univ of Utah, August 1987.
- [5] Zorin, D., Schröder, P., and Sweldens, W., Interpolating Subdivision for Meshes with Arbitrary Topology. *ACM SIGGRAPH 1996*, 189~192.
- [6] Ball, A. A., Storry, D.J., Conditions for tangent plane continuity over recursively generated B-spline surfaces, *ACM Transactions on Graphics*, 1988, 7(2):83~102.
- [7] Halstead, M., M. Kass, and T. DeRose., Efficient fair interpolation using Catmull-Clark surface, *ACM SIGGRAPH 1993*, 35~44.
- [8] Reif, U., A unified approach to subdivision algorithms near extraordinary vertices, *Computer Aided Geometric Design*, 1995, 12(2): 153~174.
- [9] Peters, J., and Reif, U., Analysis of algorithms generalizing B-spline subdivision, *SIAM, Journal of Numerical Analysis*, 1998, 35: 728~748.
- [10] Stam, J., Exact evaluation of Catmull-Clark subdivision surfaces at arbitrary parameter values, *ACM SIGGRAPH 1998*, 395~404.
- [11] DeRose, T., Kass, M., and Truong, T., Subdivision surfaces in character animation. *ACM SIGGRAPH 1998*, 85~94.
- [12] Qin, H., Mandal, C. and Vemuri, B. C., Dynamic catmull-clark subdivision surfaces. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 1998, 4(3):215~229.
- [13] Sederberg, T., Zheng, J., Sewell, D. and Sabin, M., Non-uniform recursive subdivision surfaces, *ACM SIGGRAPH 1998*, 387~394.
- [14] Morin, G., Warren, J., and Weimer, H., A subdivision scheme for surfaces of revolution, *Computer Aided Geometric Design*, 2001, 18: 483~502.
- [15] Zhang, J., C-curves: An extension of cubic curves, *Computer Aided Geometric Design*, 1996 13,199~217.
- [16] Zhang, H., and Wang, G., Semi-stationary subdivision operators and their applications in geometric modeling. Submitted to *Progress in Natural Science*.
- [17] Maillot, J., and Stam, J., A unified subdivision scheme for polygonal modeling. *Computer graphics forum*, 2001, 20(3).
- [18] Zorin, D., and Schröder, P., A unified framework for primal/dual quadrilateral subdivision schemes. *Computer Aided Geometric Design* 2001, 18:429~454.

- [19] Dyn, N., and Levin, D., Interpolating subdivision schemes for the generation of curves and surfaces. Multivar, Approx. and Interp. W. Hausmann and K. Jetter(eds), 1990 Birkhäuser Verlag, Basel.
- [20] Kobbelt, L., Interpolatory subdivision for quad-meshes. Computer graphics forum, 1996, 15:409-420

## 附录

图 1 中分子图的函数和参数选取：图 f 中  $f \equiv 2, \omega(\alpha) = 1/\cos(\alpha/2), \alpha = 2, \delta = 1$ ；图 g 中  $f = 1.5 \cos(\alpha/2), \omega \equiv 1, \alpha = 2, \delta = 0.5$ ；图 h 中  $f = 1.2, \omega \equiv 1/\cos(\alpha/2), \alpha = 9.05, \delta = 1.0$ 。

定理 2 证明：由公式(10)，矩阵  $S_h$  的特征值是  $\left\{1, \frac{1}{2}, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5\right\}$ ，其中  $\lambda_3 = \frac{1 - \delta(1 - \omega)}{4(1 + f)}$ ， $\lambda_{4,5} = \frac{1}{8(1 + f)}(a \pm \sqrt{b})$ ，

$a = 1 + \delta + 2f$ ， $b = (1 - 3\delta - 2f)^2 - 8\delta(\delta + f)\omega$ ，进一步可知  $S_h$  存在特征分解  $S_h = A^T \text{diag}(1, 1/2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)A$ ，其中  $A^T A = A A^T = I$  是正交矩阵。当  $0 \leq \delta \leq 1, |\omega| < 2, f > 0$  时，有  $|\lambda_3| < 1/2$ 。观察到  $a < 2 + 2f$ ， $(1 - 3\delta - 2f)^2 \leq 4(1 + f)^2$ ， $\delta(\delta + f)\omega < (1 + f)\omega$ ，可知

$$|\lambda_{4,5}| \leq \frac{|a| + \sqrt{|b|}}{8(1 + f)} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \sqrt{\frac{|\omega|}{8(1 + f)}} < 1.$$

设  $n$  次细分以后，设局部顶点序列构造的列向量是  $P^h(i) = (P_{i-2}^h, P_{i-1}^h, P_i^h, P_{i+1}^h, P_{i+2}^h)^T$ ，则有

$$P^h(2^h i) = S_h S_{h-1} \cdots S_1 P^0(i) = A^T \text{diag}(1, 2^{-h}, \lambda_3^h, \lambda_4^h, \lambda_5^h) A P^0(i) \rightarrow A^T \text{diag}(1, 0, 0, 0, 0) A P^0(i)$$

所以细分方法收敛。进一步，如果  $S_h$  中绝对值次大的特征值其重数为 1，曲线光滑。

## Semi-Stationary Push-Back Subdivision Schemes\*

Zhang Hong-xin<sup>1,2</sup>, Wang Guo-jin<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>(State Key Laboratory of CAD&CG, Institute of Computer Image and Graphics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China);

<sup>2</sup>(Department of mathematic, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

E-mail: [zhx@math.zju.edu.cn](mailto:zhx@math.zju.edu.cn); [wgi@math.zju.edu.cn](mailto:wgi@math.zju.edu.cn)

<http://www.cad.zju.edu.cn>

**Abstract:** To overcome the shortage of classic subdivision schemes, a class of novel semi-stationary push subdivision schemes is proposed. Combined with the advantage of unified subdivision framework, semi-stationary control and push-back operator, the schemes in curve and surface case are given based on subdivision operator. And several limit properties are also derived. These methods can generate a series of blending shapes between approximation and interpolation of the initial control mesh. In surface case, direction tags are introduced to solve the fairness problem. Our extensible schemes based on symbol representation are much useful in computer animation and industrial prototype design application.

**Key words:** Surface modeling; subdivision surface; interpolator schemes; curve discretization

\* Received Feb 28th, 2002; accepted May 16th, 2002

Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant No.60173034; the Foundation of State Key Basic Research 973 Item under Grant No.G1998030600;