

# 保持几何连续性的曲线形状调配

张宏鑫 王国瑾

(浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室, 浙江大学数学系, 杭州, 310027)

**摘要:** 在形状调配过程中, 中间过渡曲线的几何连续性往往是不能保证的. 本文从平衡调整的角度出发, 利用 Bézier 曲线的边界性质, 研究形状调配中曲线的几何连续特征保持问题. 本文着重讨论了线性混合过程中, 一阶和二阶几何连续保持条件及相应解决办法; 并对  $n$  阶情况提出平衡化几何连续条件, 从而得出一般的 Bézier 曲线在形状调配中几何连续的保持方法. 此方法适用于计算机动画和工业造型设计.

**关键词:** 形状调配, 几何连续性, Bézier 曲线.

## Shape Blending of Curves : Research into Geometric Continuity Preserving

Zhang Hongxin, Wang Guojin

*State Key Laboratory of CAD&CG and Department of Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou, 310027*

**Abstract** In shape blending process, the geometric continuity of blending curves is not always preserved. In this paper, based on a symmetric opinion, the geometric continuity preserving problems of blending curves are investigated by using the boundary properties of Bézier curve. Especially, in the linear blending process, the maintenance conditions of the first order and the second order geometric continuities are derived, and several solutions are discussed. Then an  $n$ -th order balance geometric continuity condition and its relative generic preserving algorithm are given. The algorithms can be used in computer animation and industry design.

**Keyword** shape blending, geometric continuity, Bézier curve.

## 1 引言

形状调配(Shape Blending), 又被称作形状混合, 是计算机关键帧动画的核心技术. 一般指在两关键帧中插入若干中间帧, 产生连续平滑的过渡<sup>[1,2]</sup>. 在工业造型设计中, Eric Chen<sup>[3]</sup>采用对形状调配, 以得到更符合实际需求和审美潮流的综合设计. 在模式识别中, DeCarlo 和 Metaxas<sup>[4]</sup>通过体素之间进行调配混合, 加入中间的过渡形状, 在提供较少的参数情况下获得较大的表示域. 总之, 形状调配是计算机图形表示领域中的活跃课题.

在关于形状调配的研究中, 研究者注重于过渡过程的实现, 但对中间过渡形状的性质研究侧重于克服自交和萎缩现象. 在评判动画效果的好坏时, 常强调根据运动规律找出保证动作平滑和符合自然节奏的运动路径<sup>[5]</sup>, 即注重于各帧画面之间的过渡和衔接自然, 但对固定的某一幅中间帧内部, 其各种几何元素之间拼合得是否平滑未加以充分的注意和研究. 由此就产生了这样的研究课题: 在何种条件之下, 中间帧画面能保持原有的始终帧内部的几何连续性? 我们不妨称这个问题是保持几

---

本课题受国家自然科学基金(No.6997304), 浙江省自然科学基金和国家重点基础研究 973 项目(No.G1998030600)资助

何连续性的形状调配问题.

本文从形状调配的应用背景出发, 给出了保持一阶、二阶几何连续的 Bézier 曲线形状调配条件以及改进的调配方法, 进一步给出平衡化的 n 阶几何连续条件以及在形状调配中的应用.

## 2 Bézier 曲线与几何连续性

假设 n 次 Bézier 曲线

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{j=0}^n B_j^n(t) \mathbf{P}_j, \quad (1)$$

其中  $B_j^n(t) = \binom{n}{j} (1-t)^{n-j} t^j$  为 n 次 Bernstein 基函数,  $\mathbf{P}_j \in \mathbf{R}^3$  为控制顶点,  $j \in Z$ ,  $Z$  是整数集. 为

简化记号, 设  $Z_+$  为非负整数集,  $Z_-$  为非正整数集, 我们定义控制顶点的向前差分 and 向后差分:

$$\Delta \mathbf{P}_j = \mathbf{P}_{j+1} - \mathbf{P}_j, \quad j \in Z_+; \quad \nabla \mathbf{P}_j = \mathbf{P}_j - \mathbf{P}_{j-1}, \quad j \in Z_-; \quad (2)$$

以及 k 次向前差分和 k 次向后差分:

$$\Delta^k \mathbf{P}_j = \Delta(\Delta^{k-1} \mathbf{P}_j), \quad \nabla^k \mathbf{P}_j = \nabla(\nabla^{k-1} \mathbf{P}_j), \quad \Delta^0 \mathbf{P}_j = \nabla^0 \mathbf{P}_j = \mathbf{P}_j, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3)$$

由差分算子的线性性质, 易知(1)式所示的 n 次 Bézier 曲线  $\mathbf{r}(t)$  在端点处的 k 阶导矢为:

$$\frac{d^k \mathbf{r}(0)}{dt^k} = \frac{n!}{(n-k)!} \Delta^k \mathbf{P}_0, \quad \frac{d^k \mathbf{r}(1)}{dt^k} = \frac{n!}{(n-k)!} \Delta^k \mathbf{P}_{n-k}. \quad (4)$$

其次, 我们给出拼接曲线几何连续的定义, 并给出拼接曲线几何连续的充要条件.

**定义 1** 假设参数曲线  $\mathbf{r}(t) (t \in [a, b])$  由两段参数曲线  $\mathbf{u}(t)$  和  $\mathbf{v}(t)$  拼接而成, 即

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} \mathbf{u}(t) & t \in [a, c] \\ \mathbf{v}(t) & t \in [c, b]. \end{cases} \quad (5)$$

如果存在一个参数变换  $t = \alpha(s) (s \in [a_1, b_1])$ , 使得  $\mathbf{r}(\alpha(s)) \in C^n[a_1, b_1]$  且

$\frac{d}{ds}[\mathbf{r}(\alpha(s))] \neq \mathbf{0} (s \in [a_1, b_1])$ , 则称  $\mathbf{r}(t)$  是 n 阶几何连续曲线, 记为  $\mathbf{r}(t) \in GC^n[a, b]$ .

**定理 1 (GC<sup>n</sup> 拼接充要条件)** 设曲线  $\mathbf{r}(t) (t \in [a, b])$  由  $\mathbf{u}(t)$  和  $\mathbf{v}(t)$  拼接而成, 如(5)式所示, 且

$$\mathbf{u}(t) \in C^n[a, c], \mathbf{u}'(t) \neq \mathbf{0}; \quad \mathbf{v}(t) \in C^n[c, b], \mathbf{v}'(t) \neq \mathbf{0}; \quad (6)$$

则  $\mathbf{r}(t) \in GC^n[a, b]$  等价于存在 n 个实数  $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, n)$  且  $\alpha_i > 0$ , 使得

$$\alpha(s) = c + \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i s^i}{i!}, \quad (7)$$

$$\frac{d^k \mathbf{v}(t)}{dt^k} \Big|_{t=c^+} = \frac{d^k \mathbf{u}(\alpha(s))}{ds^k} \Big|_{s=0^-} \quad (k=1,2,\dots,n). \quad (8)$$

上述定理表明，(5)式所示的曲线为  $GC^n$  当且仅当存在一个简单的参数变换  $t = \begin{cases} \alpha(s) & t \in [a, c] \\ s & t \in [c, b] \end{cases}$  可

满足定义 1. 一般  $\alpha_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) 被称作形状拼接参数.

### 3 保持几何连续的参数曲线形状调配

设初始帧为曲线  $\mathbf{r}_0(t)$ ，终了帧为曲线  $\mathbf{r}_1(t)$ ，并假设  $\mathbf{r}_i(t) \in GC^n [0,2]$  ( $i=0,1$ ) 都是由次数分别为  $m$  和  $\bar{m}$  的两段 Bézier 曲线在  $GC^n$  条件下拼接而成，其中

$$\mathbf{r}_i(t) = \begin{cases} \mathbf{u}_i(t) = \sum_{j=0}^m \mathbf{P}_{j-m}^i B_j^m(t) & t \in [0,1], i=0,1. \\ \mathbf{v}_i(t) = \sum_{j=0}^{\bar{m}} \mathbf{P}_j^i B_j^{\bar{m}}(t-1) & t \in [1,2], i=0,1. \end{cases} \quad (9)$$

这里  $\{\mathbf{P}_j^i\}_{j=-m}^{\bar{m}}$  表示曲线  $\mathbf{r}_i(t)$  的控制顶点，顶点的上角标  $i$  表示它属于曲线  $\mathbf{r}_i(t)$ ，若  $i=0,1$  表示关键帧曲线，若  $0 < i = \omega < 1$  则表示中间帧曲线；顶点的非正下角标表示相应曲线前段，非负下角标表示相应曲线的后段. 定义调配曲线为

$$\mathbf{r}_\omega(t) = \text{Blend}(\mathbf{r}_0(t), \mathbf{r}_1(t); \omega),$$

如图 1.

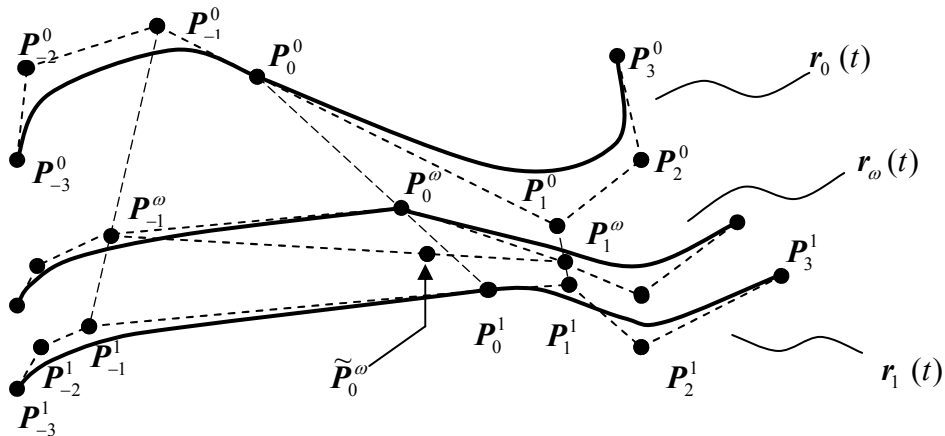


图 1. Bézier 曲线的形状调配

相应地有

$$\begin{cases} \mathbf{u}_\omega(t) = \sum_{j=0}^m \mathbf{P}_{j-m}^\omega B_j^m(t) = \text{Blend}(\mathbf{u}_0(t), \mathbf{u}_1(t); \omega) & t \in [0,1], \\ \mathbf{v}_\omega(t) = \sum_{j=0}^{\bar{m}} \mathbf{P}_j^\omega B_j^{\bar{m}}(t-1) = \text{Blend}(\mathbf{v}_0(t), \mathbf{v}_1(t); \omega) & t \in [1,2]. \end{cases} \quad (10)$$

调配函数  $\text{Blend}(*, *, \omega)$  在简单情况下可取线性混合函数

$$\text{Blend}(\mathbf{r}_0(t), \mathbf{r}_1(t); \omega) = (1-\omega)\mathbf{r}_0(t) + \omega\mathbf{r}_1(t), 0 \leq \omega \leq 1. \quad (11)$$

在以下的讨论中我们可以看到  $\mathbf{r}_\omega(t)$  不一定满足  $GC^n$  ( $n=1,2,\dots$ ) 条件. 于是问题转化为求作  $\mathbf{r}_\omega(t)$  的逼近曲线  $\tilde{\mathbf{r}}_\omega(t)$ , 满足  $GC^n$  拼接条件.

### 3.1 $GC^1$ 情况

若  $\mathbf{r}_i(t) \in GC^1$  ( $i=0,1$ ), 则由定理 1 和(4)式知必有  $\alpha_1^i > 0$  ( $i=0,1$ ), 且控制顶点满足

$$\bar{m}\Delta\mathbf{P}_0^i = m\alpha_1^i\nabla\mathbf{P}_0^i \quad (i=0,1). \quad (12)$$

不失一般性, 以下假定  $\mathbf{P}_{-1}^i \neq \mathbf{P}_0^i, \mathbf{P}_0^i \neq \mathbf{P}_1^i$  ( $i=0,1$ ). 如果我们取调配函数是线性混合函数, 易知  $\mathbf{r}_\omega(t)$  的控制顶点

$$\mathbf{P}_j^\omega = (1-\omega)\mathbf{P}_j^0 + \omega\mathbf{P}_j^1, \quad j = -m, -(m-1), \dots, 0, 1, \dots, \bar{m}, \quad 0 \leq \omega \leq 1. \quad (13)$$

应用(12), (13)两式可知:

$$\begin{aligned} G_1 &= \bar{m}\Delta\mathbf{P}_0^\omega - m\alpha_1^\omega\nabla\mathbf{P}_0^\omega \\ &= \bar{m}[(1-\omega)\Delta\mathbf{P}_0^0 + \omega\Delta\mathbf{P}_0^1] - m\alpha_1^\omega[(1-\omega)\nabla\mathbf{P}_0^0 + \omega\nabla\mathbf{P}_0^1] \\ &= m[(1-\omega)(\alpha_1^0 - \alpha_1^\omega)\nabla\mathbf{P}_0^0 + \omega(\alpha_1^1 - \alpha_1^\omega)\nabla\mathbf{P}_0^1]. \end{aligned} \quad (14)$$

但是,  $\mathbf{r}_\omega(t)$  要达到  $GC^1$ , 即要满足  $G_1 \equiv 0$  ( $0 < \omega < 1$ ) 且  $\alpha_1^\omega > 0$ , 其充要条件是

$$\alpha_1^0 = \alpha_1^1 = \alpha_1^\omega \quad (0 < \omega < 1) \quad (15)$$

或

$$\begin{cases} \nabla\mathbf{P}_0^1 = \lambda\nabla\mathbf{P}_0^0 \quad (\lambda \neq 0) \\ \alpha_1^\omega = \frac{1-\omega}{(1-\omega)+\lambda\omega}\alpha_1^0 + \frac{\lambda\omega}{(1-\omega)+\lambda\omega}\alpha_1^1, \quad (0 < \omega < 1) \end{cases} \quad (16)$$

再由(12)式的已知条件, (15)式又等价于

$$\begin{cases} \|\Delta\mathbf{P}_0^0\| : \|\nabla\mathbf{P}_0^0\| = \|\Delta\mathbf{P}_0^1\| : \|\nabla\mathbf{P}_0^1\| \\ \alpha_1^\omega = \alpha_1^0 \quad (0 < \omega < 1). \end{cases} \quad (18)$$

这样我们就得出

**定理 2** 按(9)式定义两条  $GC^1$  拼接的曲线  $\mathbf{r}_0(t)$  和  $\mathbf{r}_1(t)$ , 其线性混合曲线  $\mathbf{r}_\omega(t)$  ( $0 < \omega < 1$ ) 始终达

到  $GC^1$  的充要条件是(18)(19)两式成立, 或者(16)(17)两式成立.  $\square$

容易看出, 对始终帧曲线的控制顶点加上(16)或(18)的条件是比较苛刻的, 在实际应用中较难满足. 这时不论如何选取  $\alpha_1^\omega$  ( $0 < \omega < 1$ ) 均有  $G_1 \neq 0$ , 即  $\mathbf{P}_{-1}^\omega$ ,  $\mathbf{P}_0^\omega$  和  $\mathbf{P}_1^\omega$  三点不共线. 由此我们想到, 把顶点  $\mathbf{P}_0^\omega$  调整到直线段  $\mathbf{P}_{-1}^\omega \mathbf{P}_1^\omega$  上的一点

$$\tilde{\mathbf{P}}_0^\omega = \frac{m\alpha_1^\omega}{\bar{m} + m\alpha_1^\omega} \mathbf{P}_{-1}^\omega + \frac{\bar{m}}{\bar{m} + m\alpha_1^\omega} \mathbf{P}_1^\omega, \quad (20)$$

式中  $\alpha_1^\omega$  仍按(17)式计算, 其中

$$\lambda = \|\nabla \mathbf{P}_0^1\| : \|\nabla \mathbf{P}_0^0\| > 0. \quad (21)$$

这时必有  $\tilde{G}_1 = \bar{m}(\mathbf{P}_1^\omega - \tilde{\mathbf{P}}_0^\omega) - m\alpha_1^\omega(\tilde{\mathbf{P}}_0^\omega - \mathbf{P}_{-1}^\omega) = 0$ . 这个思想可总结为

### 算法 1 (保持 $GC^1$ 的曲线调配方法)

1. 计算控制顶点  $\mathbf{P}_j^\omega = (1-\omega)\mathbf{P}_j^0 + \omega\mathbf{P}_j^1$ ,  $-m \leq j \leq \bar{m}$ ,  $j \neq 0$ ;
2. 按(17)(21)式求得  $\alpha_1^\omega > 0$ ;
3. 按(20)式计算  $\tilde{\mathbf{P}}_0^\omega$ ;
4. 以  $\{\mathbf{P}_j^\omega\}_{j=-m, j \neq 0}^{\bar{m}}$ ,  $\tilde{\mathbf{P}}_0^\omega$  为控制顶点绘制调配曲线  $\tilde{\mathbf{r}}_\omega(t)$ , 则  $\tilde{\mathbf{r}}_\omega(t) \in GC^1[0,2]$ .

参见图 1. 若调配曲线已满足定理 2, (20)式求得的  $\tilde{\mathbf{P}}_0^\omega$  恰与  $\mathbf{P}_0^\omega$  重合, 这有利于算法的统一实现. 易知若采用 Sederberg 的内在量方法<sup>[2]</sup>调配控制顶点, 是自动保证  $GC^1$  的. 其原因是该方法插值控制多边形的边长和相邻边的偏转角, 保持了拼接的两曲线导矢平行的条件, 但该方法不能保证  $GC^2$ .

### 3.2 $GC^2$ 情况

在多数工程应用中, 曲线达到  $GC^1$  拼接即切线连续往往是不够的, 需要加强到  $GC^2$  即曲率连续才能更好地符合实际需求. 下面研究  $GC^2$  成立的条件. 假设曲线  $\mathbf{r}_i(t) \in GC^2$  ( $i = 0,1$ ), 则由定理 1 知应满足(12)式和

$$\bar{m}(\bar{m}-1)\Delta^2 \mathbf{P}_0^i = m(m-1)(\alpha_1^i)^2 \nabla^2 \mathbf{P}_0^i + m\alpha_2^i \nabla \mathbf{P}_0^i \quad (i = 0,1). \quad (22)$$

再设  $\mathbf{r}_0(t)$  和  $\mathbf{r}_1(t)$  已满足定理 2 中使  $\mathbf{r}_\omega(t)$  保持  $GC^1$  的条件, 这时有两种情况:

情况 1.  $\alpha_1^0 = \alpha_1^1 = \alpha_1^\omega$ .

这时应用(22)(13)两式可得

$$\begin{aligned} G_2 &= \bar{m}(\bar{m}-1)\Delta^2 \mathbf{P}_0^\omega - [m(m-1)(\alpha_1^\omega)^2 \nabla^2 \mathbf{P}_0^\omega + m\alpha_2^\omega \nabla \mathbf{P}_0^\omega] \\ &= m[(1-\omega)(\alpha_2^0 - \alpha_2^\omega) \nabla \mathbf{P}_0^0 + \omega(\alpha_2^1 - \alpha_2^\omega) \nabla \mathbf{P}_0^1]. \end{aligned} \quad (23)$$

由此可知, 若要使  $\mathbf{r}_\omega(t)$  对任意的  $\omega$  都保持  $GC^2$ , 即  $G_2 \equiv 0 (0 < \omega < 1)$ , 当且仅当

$$\alpha_2^0 = \alpha_2^1 = \alpha_2^\omega \quad (24)$$

或(16)式成立.

情况 2.  $\alpha_1^0 \neq \alpha_1^1$  且  $\nabla \mathbf{P}_0^1 = \lambda \nabla \mathbf{P}_0^0 (\lambda \neq 0)$ .

这时我们有

$$G_2 = \xi(\omega) \nabla \mathbf{P}_0^0 + \eta(\omega) \nabla^2 \mathbf{P}_0^0 + \zeta(\omega) \nabla^2 \mathbf{P}_0^1, \quad (25)$$

这里

$$\begin{cases} \xi(\omega) = m[(1-\omega)(\alpha_2^0 - \alpha_2^\omega) + \lambda\omega(\alpha_2^1 - \alpha_2^\omega)] \\ \eta(\omega) = m(m-1)(1-\omega)[(\alpha_1^0)^2 - (\alpha_1^\omega)^2] \\ \zeta(\omega) = m(m-1)\omega[(\alpha_1^1)^2 - (\alpha_1^\omega)^2], \end{cases} \quad (26)$$

其中  $\alpha_1^\omega$  由(18)式确定. 为使  $\mathbf{r}_\omega(t)$  对任意的  $\omega$  都保持  $GC^2$ , 即  $G_2 \equiv 0 (0 < \omega < 1)$ . 则必须对任意

时刻  $\omega \in (0,1)$  有向量  $\nabla \mathbf{P}_0^0$  与  $\eta(\omega) \nabla^2 \mathbf{P}_0^0 + \zeta(\omega) \nabla^2 \mathbf{P}_0^1$  保持共线. 在  $\alpha_1^0 \neq \alpha_1^1$  且  $\alpha_1^\omega$  由(17)式计算时,

$\eta(\omega)$  和  $\zeta(\omega)$  均不为零, 因而

$$\mu = \frac{\eta(\omega)}{\zeta(\omega)} = \frac{(1-\omega)[(\alpha_1^0)^2 - (\alpha_1^\omega)^2]}{\omega[(\alpha_1^1)^2 - (\alpha_1^\omega)^2]} = -\lambda \frac{2\alpha_1^0 + \omega[(\lambda-2)\alpha_1^0 + \lambda\alpha_1^1]}{(\alpha_1^0 + \alpha_1^1) + \omega[(2\lambda-1)\alpha_1^1 - \alpha_1^0]} \quad (27)$$

恒为常数. 这只有当  $\alpha_1^0, \alpha_1^1$  和  $\lambda$  满足关系式  $(\lambda-2)\alpha_1^0 + \lambda\alpha_1^1 = 0$  和  $(2\lambda-1)\alpha_1^1 - \alpha_1^0 = 0$ , 得  $\lambda = 1$

即有  $\alpha_1^0 = \alpha_1^1$ , 这是不可能的. 由此我们得出

**定理 3** 参数曲线  $\mathbf{r}_0(t)$  和  $\mathbf{r}_1(t)$  按定理 2 所定义. 其线性混合曲线  $\mathbf{r}_\omega(t) (0 < \omega < 1)$  始终达到  $GC^2$  的充要条件是(15)(24)两式 (即(18)(19)(24)三式) 同时成立, 或(15)(16)两式 (即(18)(19)(16)三式) 同时成立.  $\square$

由此可见欲使  $\mathbf{r}_\omega(t) \in GC^2 (0 < \omega < 1)$ , 必须对始终帧曲线的控制顶点施加更加苛刻的条件,

实际上更难满足. 这时不论如何选取  $\alpha_1^\omega, \alpha_2^\omega (0 < \omega < 1)$ , 均有  $G^2 \neq 0$ . 以上出现的问题实际上是连续性条件中形状参数与控制顶点位置相互制约的反映, 单纯地调配控制顶点无法保持连续性条件. 在 Barsky 的文章<sup>[6]</sup>中曾针对两段都是  $m$  次 Bézier 曲线的  $GC^2$  拼接给出一种几何作图方法. 因此, 我们想到融合 Barsky 的方法, 把  $\mathbf{P}_j^\omega$  分别调整到  $\tilde{\mathbf{P}}_j^\omega (j = -1, 0, 1)$ , 使得由此得到的  $\tilde{G}^2 = 0$ . 下面简述调整思想.

由(12)(22)两式可知  $\{\mathbf{P}_j^i\}_{j=-2}^2$  五点共平面  $\pi^i (i = 0, 1)$ , 因而可在平面  $\pi^i$  上按形状参数  $\alpha_1^i$  和  $\alpha_2^i$  求

得多边形  $\mathbf{P}_{-2}^i \mathbf{P}_{-1}^i \mathbf{P}_0^i \mathbf{P}_1^i \mathbf{P}_2^i$  的补角多边形  $\mathbf{P}_{-2}^i \mathbf{T}_{21}^i \mathbf{P}_2^i = \mathbf{T}_{20}^i \mathbf{T}_{21}^i \mathbf{T}_{22}^i$  ( $i=0,1$ ) (图2). 若对点列

$\mathbf{T}_{2,j}^i$  ( $i=0,1$ ) 进行线性调配得到位于平面  $\pi^\omega$  上的3点  $\mathbf{T}_{2,j}^\omega$  ( $j=0,1,2$ ), 则按类似于上述补角多边形

产生的逆过程, 由割角产生的多边形  $\tilde{\mathbf{P}}_{-2}^\omega \tilde{\mathbf{P}}_{-1}^\omega \tilde{\mathbf{P}}_0^\omega \tilde{\mathbf{P}}_1^\omega \tilde{\mathbf{P}}_2^\omega$  必共面且满足  $\tilde{\mathbf{G}}_2 = 0$ . 这一思想可总结为

### 算法2 (保持 $GC^2$ 的曲线调配方法)

1. 记辅助控制顶点  $\mathbf{T}_{k,0}^i = \mathbf{P}_{-k}^i, \mathbf{T}_{k,k}^i = \mathbf{P}_k^i$  ( $i=0,1; k=0,1,2$ ), 在公式

$$\mathbf{T}_{k,j}^i = (1 - \delta_{k,j}^i) \mathbf{T}_{k+1,j}^i + \delta_{k,j}^i \mathbf{T}_{k+1,j+1}^i \quad (i=0,1) \quad (28)$$

中令  $k=1$  且  $j=0$  或  $j=1$  求出辅助控制顶点  $\mathbf{T}_{2,1}^i$  ( $i=0,1$ ), 其中

$$\begin{cases} \delta_{0,0}^i = \frac{\bar{m}}{\bar{m} + m\alpha_1^i} \\ \delta_{1,0}^i = \frac{m(m-1)(\alpha_1^i)^2 + m\alpha_2^i + [\bar{m}(\bar{m}-1) - m(m-1)(\alpha_1^i)^2 - m\alpha_2^i](1 - \delta_{0,0}^i)}{2m(m-1)(\alpha_1^i)^2 + m\alpha_2^i + [\bar{m}(\bar{m}-1) - m(m-1)(\alpha_1^i)^2 - m\alpha_2^i](1 - \delta_{0,0}^i)} \\ \delta_{1,1}^i = \frac{-\bar{m}(\bar{m}-1)}{-2\bar{m}(\bar{m}-1) + [\bar{m}(\bar{m}-1) - m(m-1)(\alpha_1^i)^2 - m\alpha_2^i]\delta_{0,0}^i} \end{cases} \quad (29)$$

2. 调配产生控制顶点  $\mathbf{P}_j^\omega = (1-\omega)\mathbf{P}_j^0 + \omega\mathbf{P}_j^1, -m \leq j \leq \bar{m}, j \neq -2, -1, \dots, 2$ ;

调配产生辅助控制顶点  $\mathbf{T}_{2,j}^\omega = (1-\omega)\mathbf{T}_{2,j}^0 + \omega\mathbf{T}_{2,j}^1, j=0,1,2$ ;

3. 按(17)(21)式求得  $\alpha_1^\omega > 0$ , 并用适当的调配函数求得  $\alpha_2^\omega$ ;

4. 在(28)(29)式中改记上标  $i$  为  $\omega$  求得  $\mathbf{T}_{1,0}^\omega, \mathbf{T}_{1,1}^\omega$  和  $\mathbf{T}_{0,0}^\omega$ , 再令  $\tilde{\mathbf{P}}_{-k}^\omega = \mathbf{T}_{k,0}^\omega, \tilde{\mathbf{P}}_k^\omega = \mathbf{T}_{k,k}^\omega$  ( $k=0,1,2$ );

5. 以  $\{\mathbf{P}_j^\omega\}_{j=-m}^{-3}, \{\tilde{\mathbf{P}}_j^\omega\}_{j=-2}^2, \{\mathbf{P}_j^\omega\}_{j=3}^{\bar{m}}$  为控制顶点绘制调配曲线  $\tilde{\mathbf{r}}_\omega(t)$ , 则  $\tilde{\mathbf{r}}_\omega(t) \in GC^2[0,2]$ .

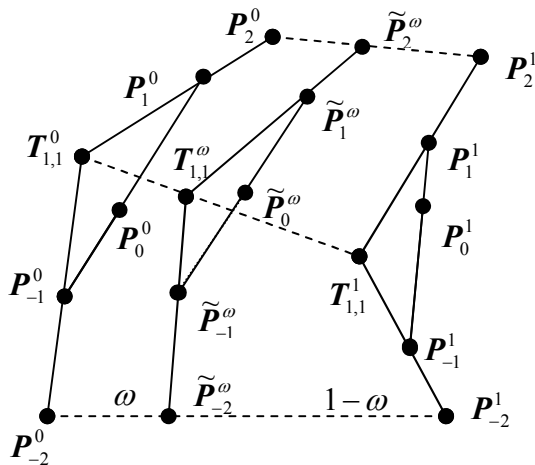


图2. 保持  $GC^2$  的调整

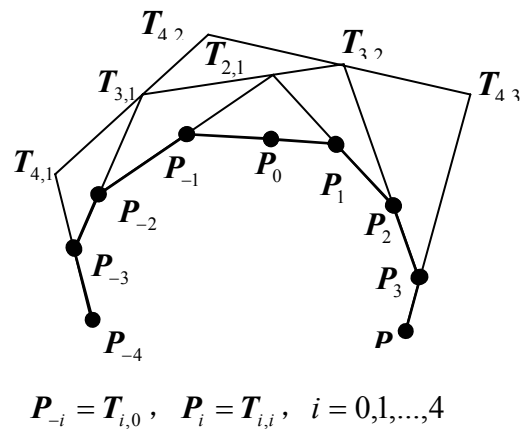


图3. 4阶的平衡化条件

可以验证算法 2 和算法 1 是一脉相承的. 在算法 1 中, 补角过程是退化的, 引入辅助控制顶点  $\mathbf{T}_{0,0}^i = \mathbf{P}_0, \mathbf{T}_{1,0}^i = \mathbf{P}_{-1}, \mathbf{T}_{1,1}^i = \mathbf{P}_1 (i = 0,1)$ , 再在(28)式中令  $k = j = 0$ , 并改记上标  $i$  为  $\omega$ , 记  $\mathbf{T}_{0,0}^\omega = \tilde{\mathbf{P}}_0^\omega$ , 结合(29)式就得到(20)式. 算法 1 就是用割角过程求得过渡帧中调整的控制顶点  $\tilde{\mathbf{P}}_0^\omega$ . 这种一致性给我们在高阶连续性推广上带来了启示, 我们可以沿用算法 2 进行类似的补角和割角过程来达到中间帧曲线  $GC^n$ , 辅助控制顶点的算法由下节给出.

### 3.3 Bézier 曲线的平衡化 $n$ 阶几何连续条件

回顾定理 1 的条件, 若  $\mathbf{r}(t) \in GC^n[0,2]$ , 按(9)式定义, 展开(8)式有

$$\mathbf{v}^{(k)}(1) = \sum_{i=1}^k f_{i,j} \mathbf{u}^{(j)}(1) \quad , \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (30)$$

其中  $f_{k,j} = f_{k,j}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j)$ , 可由  $k$  次链式法则求得<sup>[7]</sup>. 应用(4)式可把(30)改写为

$$\frac{\bar{m}!}{(\bar{m}-j)!} \Delta^k \mathbf{P}_0 = \sum_{i=1}^k \frac{m!}{(m-j)!} f_{k,j} \nabla^j \mathbf{P}_0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

即

$$\sum_{j=-k}^k g_{k,j} \mathbf{P}_j = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (31)$$

其中  $g_{k,j}$  是与  $f_{k,j}$  有关的比例系数, 且易知

$$\sum_{j=-k}^k g_{k,j} = 0. \quad (32)$$

下面, 我们仿算法 2 按几何连续度  $k$ , 引入权因子  $\delta_{k,j}$ , 添加  $k$  层辅助控制顶点  $\{T_{k,j}\}_{j=0}^k$ , 使得

$$\begin{cases} \mathbf{T}_{k,0} &= \mathbf{P}_{-k} \\ \mathbf{T}_{k,k} &= \mathbf{P}_k \\ \mathbf{T}_{k,j} &= (1 - \delta_{k,j}) \mathbf{T}_{k+1,j} + \delta_{k,j} \mathbf{T}_{k+1,j+1} \quad k = 0, 1, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, k, \end{cases} \quad (33)$$

由此按(31)式可得到一系列的等式

$$\sum_{j=-k}^{-(l+1)} g_{k,j} \mathbf{P}_j + \sum_{j=0}^l A_{l,j} \mathbf{T}_{l,j} + \sum_{j=l+1}^k g_{k,j} \mathbf{P}_j = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, k-1). \quad (34)$$

这里  $A_{l,j}$  是中间参数

$$\begin{cases} A_{0,0} &= g_{k,0} \\ A_{1,0} &= g_{k,-1} + (1 - \delta_{0,0}) A_{0,0} \\ A_{1,1} &= \delta_{0,0} A_{0,0} + g_{k,1} \end{cases} \quad (35)$$

$$\begin{cases} A_{l,0} = g_{k,-l} + (1 - \delta_{l-1,0})A_{l-1,0} \\ A_{l,j} = \delta_{l-1,j-1}A_{l-1,j-1} + (1 - \delta_{l-1,j})A_{l-1,j} & j = 1, 2, \dots, l-1 \\ A_{l,l} = \delta_{l-1,l-1}A_{l-1,l-1} + g_{k,l} & l = 2, 3, \dots, k-1 \end{cases} \quad (36)$$

最终得到

$$\sum_{j=0}^k A_{l,j} \mathbf{T}_{k,j} = 0. \quad (37)$$

这里可选取所有的  $A_{k,j}$  均为零. 于是, 当  $k=2$  时按(29)式定义  $\delta_{0,0}$ , 若  $k-2$  层前的  $\delta_{l,j}$  ( $l=0,1,\dots,k-2; j=0,1,\dots,l$ ) 都已知,  $k=2,3,\dots$ , 由(33)(35)(36)式可求得  $\delta_{k-1,j}$ , 进而由(32)式求得  $\mathbf{T}_{k,j}$  ( $j=0,1,\dots,k$ ). 我们称辅助控制顶点列  $\{\mathbf{T}_{n,j} | j=0,1,\dots,n\}$  和控制权因子  $\{\delta_{k,j} | k=0,1,\dots,n-1, j=0,1,\dots,k\}$  为  $GC^n$  拼接曲线  $\mathbf{r}(t)$  的  $n$  阶平衡化条件. 该条件将代数式中不可见的形状参数转化为直观的几何割角和补角过程, 且上述推导过程表明给定一组  $n$  阶平衡化条件就给出一个  $GC^n$  拼接曲线  $\mathbf{r}(t)$  的构造, 反之亦然. 图 2, 图 3 给出的就是  $n=2,4$  的情况. 实际运用时, 预先计算好  $\delta_{k,j}$  的表达式存储起来, 要计算时代入即可. 利用  $n$  阶平衡化条件, 调整过程可归纳为

### 算法 3 (保持 $GC^n$ 的曲线调配方法)

1. 对曲线  $\mathbf{r}_0(t)$  和  $\mathbf{r}_1(t)$  求出相应的辅助控制顶点列  $\mathbf{T}_{n,j}^0$  和  $\mathbf{T}_{n,j}^1$  ( $j=0,1,\dots,n$ );
2. 用适当的调配函数求出  $\mathbf{P}_j^\sigma$  ( $j=-m,\dots,-m+n+1,n+1,\dots,\bar{m}$ ),  $\mathbf{T}_{n,j}^\omega$  ( $j=1,2,\dots,n$ );
3. 用适当的调配函数求出  $\alpha_j^\omega$  ( $j=1,2,\dots,n$ );
4. 进一步求出权因子  $\delta_{k,j}^\omega$  ( $k=0,1,\dots,n-1; j=0,1,\dots,k$ );
5. 利用平衡化条件求解出  $\mathbf{T}_{n,j}^\sigma$  ( $j=0,1,\dots,n$ );
6. 以  $\mathbf{P}_{-m}^\omega, \mathbf{P}_{-(m-1)}^\omega, \dots, \mathbf{P}_{-n-1}^\omega, \mathbf{T}_{n,0}^\omega, \mathbf{T}_{n-1,0}^\omega, \dots, \mathbf{T}_{0,0}^\omega$  和  $\mathbf{T}_{0,0}^\omega, \mathbf{T}_{1,1}^\omega, \dots, \mathbf{T}_{n,n}^\omega, \mathbf{P}_{n+1}^\omega, \mathbf{P}_{n+2}^\omega, \dots, \mathbf{P}_{\bar{m}}^\omega$  为控制顶点绘制调配曲线  $\tilde{\mathbf{r}}_\omega(t)$  的前后段, 则  $\tilde{\mathbf{r}}_\omega(t) \in GC^n[0,2]$ .

## 4 结论

本文提出的基于平衡化几何连续条件的曲线调配方法实际上是给出了几何连续条件的一个几何作图方法, 具有几何直观性. 可以看成是一种割角过程及其逆过程. 通过辅助控制顶点与对应几何连续条件的转换, 有效地保证了曲线变形中的几何连续性. 而这种转换只限于拼接处附近的若干控制顶点, 因此对控制顶点的调整是局部的. 图 4 给出了利用上述算法对旋转体的母线进行形状调配

的例子。可以看到，两种的方法产生的中间过渡形状有较大差异，因我们方法加入了对中间过渡曲线几何连续性的约束，避免了在变形过程中曲线形状特征的丢失。是一种可取的算法

我们的算法是稳定快速且有弹性的。说其在效率和稳定性上是具有优势的，因为相关顶点的调整只涉及了它们之间的线性组合，而权因子既可通过迭代求得，也可事先算好后再代入，且顶点的调整只受局部参数的影响；说其对不同应用背景是有很大的弹性，是因为它可以针对应用对象具体选择不同形式的算法。由于形式上的统一性，选择常见的 Bézier 曲线模型，适合于通用的动画和造型软件。

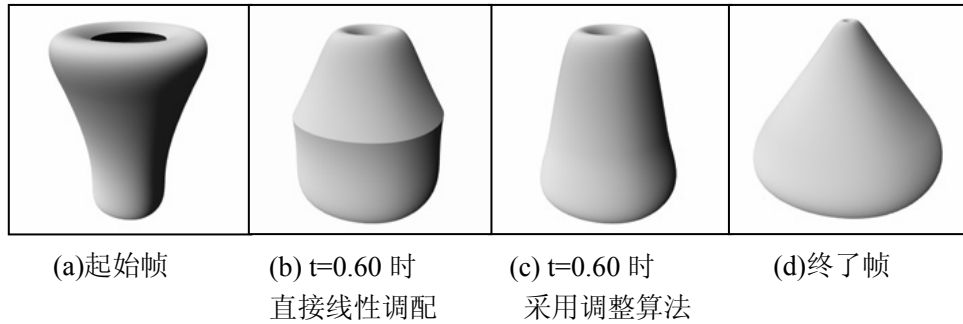


图 4

#### 参考文献

- [1] Sederberg TW, Greenwood E. A physically based approach to 2-D shape blending. Siggraph 92' Proceedings. ACM Computer Graphics 1992, 26(2):25-34.
- [2] Sederberg TW, Gao P, Wang G, Mu H. 2D shape blending : an intrinsic solution to the vertex path problem. Siggraph 93' Proceedings. ACM Computer Graphics 1993, 27(4):15-18.
- [3] Chen SE, Parent RE. Shape averaging and its applications to industrial design. IEEE Computer Graphics and Applications 1989, 9(1):47-54.
- [4] DeCarlo D, Metaxas D. Blended deformable models. IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1996,18(4):443-448.
- [5] 唐荣锡, 汪嘉业, 彭群生, 计算机图形学教程, 科学出版社, 北京, 1990.
- [6] Barskey BA, DeRose TD. Geometric continuity of parametric curves: constructions of geometrically continuous splines. IEEE Computer Graphics and Applications 1990,10(1):60-68.
- [7] Liang YD, Ye Xiuzi. Geometric continuity of curves. Journal of Computational Mathematics 1988.