最优化方法 (II)

Hongxin Zhang

2017-04-11

签到

1. 请关注微信公众号：RGB-Group
2. 在该公众号中回复：csmath
3. 在该公众号中回复：姓名_学号
4. 三次不同时间输入：本教室位置

内容

- 线性规划
- 非线性优化

- 主要参考书：
  - 《线性规划》
    - 张建中，许绍吉，科学出版社
  - 《最优化理论与方法》
    - 袁亚湘，孙文瑜，科学出版社
  - 《数学规划》
    - 黄红选，韩继业，清华大学出版社

一、线性规划

- 在人们的生产实践中，经常会遇到如何利用现有资源来安排生产，以取得最大经济效益的问题。

$利益驱动$

运筹学→

数学规划 →

线性规划(Linear Programming，LP)

- 1947年G. B. Dantzig 求解线性规划的单纯形方法
- 现有的计算机能处理成千上万个约束条件和决策变量的线性规划问题之后，线性规划的适用领域更为广泛了。

1. 基本理论

1.1 问题定义 (linear programming, LP)

- 某计算机公司提供大型计算机系统，有A, B, C三个技术团队
  - 高端系统
    - 每套售后的利润400万元
    - 需用A、B两个技术团队协作实施
    - A团队2个月，B团队1个月；
  - 中端系统
    - 每套售后的利润300万元
    - 需用A, B, C三个技术团队协作实施
    - 每个团队各需1个月
  - 2017年度，A队可工作10个月，B队8个月、C队7个月
- 问：怎样的销售策略能使总利润最大？

1.1 问题定义 (linear programming, LP)

- 设可销售x_1个高端端系统， x_2个中端系统
- 目标函数

$$\max \quad z = 4x_1 + 3x_2$$

- 约束条件

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 + x_2 \le 8 \\ x_2 \le 7 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

1.1 问题定义 (linear programming, LP)

- 在一组线性的等式或不等式约束下，求一个线性函数的最小值或最大值。
- 形式化的定义：

$$
\begin{aligned}
&\min\ c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \\
&\text{s. t.} \\
&\qquad a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\
&\qquad \ \ldots \\
&\qquad a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \\
&\qquad x_1, \ldots, x_n \ge 0
\end{aligned}
$$

1.1 问题定义 (linear programming, LP)

- 在一组线性的等式或不等式约束下，求一个线性函数的最小值或最大值。
- 形式化的定义：

目标函数
objective function

$$\begin{aligned} &\min \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \\ &\text{s.t. } A\mathbf{x} \le \mathbf{b} \\ &\qquad \mathbf{x} \ge \mathbf{0} \end{aligned}$$

c: 价值向量，cost vector
A: 约束矩阵，constraint matrix
b: 右端向量，right-hand-side vector

1.1 问题定义 (linear programming, LP)

- X：满足约束条件，称为**可行解**或**可行点**
  - (feasible point)

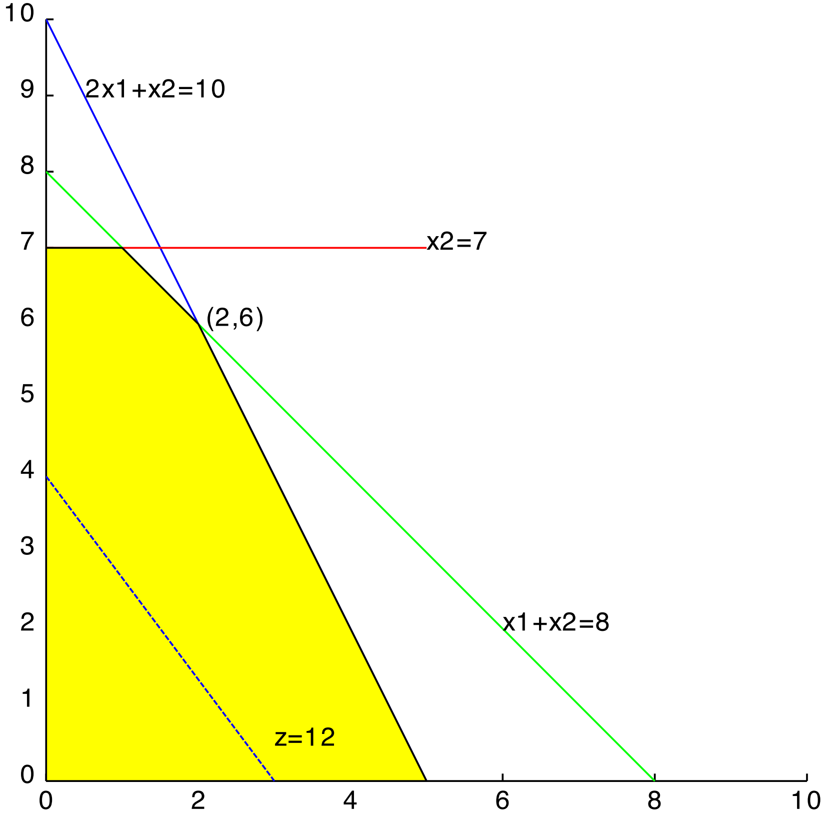
- D：所有可行点的集合,称为**可行区域**
  - (feasible region)

- LP问题：
  - D = ∅，无解或不可行
  - D ≠ ∅，但目标函数在D上无上界：无界
  - D ≠ ∅，且目标函数有限的最优解：有最优解

线性规划的图解法

$$\max \quad z = 4x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 + x_2 \le 8 \\ x_2 \le 7 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



1.2 标准LP问题

- 从实际中总结出来的LP形式不完全一样：
  - 目标函数是最大值或最小值，
  - 约束条件是等式约束或不等式约束，
  - 变量有上界或下界或无界

$$
\boxed{\begin{aligned} &\min z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \\ &\text{s.t. } A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ &\qquad\quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}}
$$

标准形式的LP问题

$$\min z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$$
$$\text{s.t. } \mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

- 标准化
  - 目标函数的转换　max z → min ($-z$)
  - 约束条件的转换（引入松弛变量）

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i \\ x_{n+i} \geq 0 \end{cases}$$

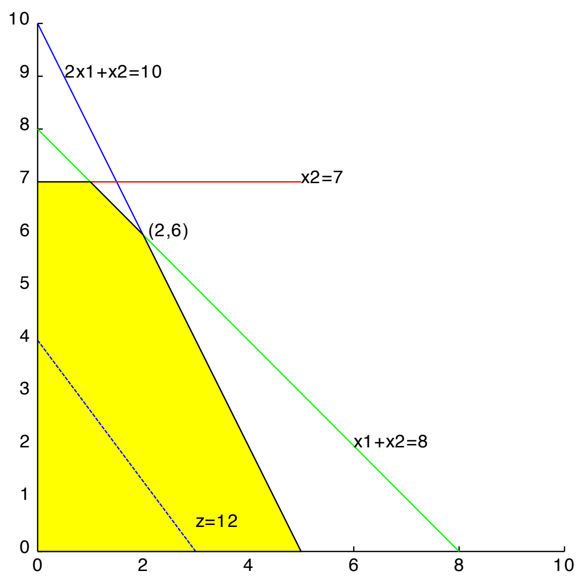
  - 变量的非负约束

$$x_j \geq l_j \Leftrightarrow y_j \geq 0, y_j = x_j - l_j$$

$$x_j\text{自由变量} \Leftrightarrow u_j \geq 0, v_j \geq 0, x_j = u_j - v_j$$

1.3 可行区域D

- 下面讨论可行区域 $D=\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}, \mathbf{x}\geq\mathbf{0}\}$ 的结构
  - 首先讨论集合 $K=\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}\}$



1.3 基本概念

- 仿射集：

对于集合$S\subseteq E^n$，如果对任意$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S, \lambda\in E^1$, 都有

$$\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y} \in S,$$

则称S为**仿射集**

- 凸集：

对任意的 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in C, \lambda\in(0,1)$，有

$$\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y} \in C,$$

则称C为**凸集**

=> 极点，极方向

1.4 基本可行解

- 定理：
  - 可行解$\mathbf{x}$是**基本可行解** $\Leftrightarrow$ $\mathbf{x}$的**正分量**所对应的**列向量线性无关**
  - 可行解$\mathbf{x}$是**基本可行解**$\Leftrightarrow$ $\mathbf{x}$为D的**极点**

可行区域的极方向

- 极方向的代数性质： $D=\{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x}=\mathbf{b}, \mathbf{x}\geq\mathbf{0}\}$的方向$\mathbf{d}$有$k$个非零分量，则$\mathbf{d}$为$D$的极方向的充要条件是$\mathbf{d}$的非零分量对应的列向量组秩为$k$-1

- 极方向的几何性质：$\mathbf{d}$为D的极方向的充要条件是$\mathbf{d}$为D的某个半直线界面方向

- 如果D有极方向， 显然D为无界集；反之若D为无界集，则D有方向，且有极方向

1.5 线性规划基本定理

基本定理1（表示定理）

定理：设$D=\{\mathbf{x}\mid A\mathbf{x}=\mathbf{b},\mathbf{x}\geq 0\}$的所有极点为$\mathbf{x}^1,\ldots,\mathbf{x}^k$，所有极方向为$\mathbf{d}^1,\ldots,\mathbf{d}^l$，则$x\in D$的充要条件是存在一组$\lambda_i(i=1,\ldots,k)$和$\mu_j(j=1,\ldots,l)$使得

$$\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\mathbf{x}^i+\sum_{j=1}^{l}\mu_j\mathbf{d}^j,$$

$$\lambda_i\geq 0, i=1,\ldots,k;\ \mu_j\geq 0, j=1,\ldots,l$$

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1$$

基本定理2

给定LP问题

$$\min z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$$

$$\text{s.t. } A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

（1）若存在有限最优值（即有最优解），则最优值必在可行区域D的某个极点上达到。

（2）目标函数存在有限最优值的充要条件是对D的所有极方向$\mathbf{d}^j$，均有$\mathbf{c}\mathbf{d}^j\geq 0$

定理的注释与理解

- 定理说明：
  - 标准LP问题的目标函数的最优值必可在某个**基本可行解**处达到。
  - 求解标准LP问题，只需要在基本可行解的集合中进行搜索。

- 求出并比较所有基本可行解的方法通常不可行。且原因在于当n较大时，基本可行解个数将很大。

- 通常的方法根据一定的规则在基本可行解的一个子集中计算搜索，这就是单纯形法。

2. 单纯形方法（Simplex Method）

2.1 基本单纯形方法

- 主要思想：先找一个基本可行解，判断它是否为最优解。若不是，就找一个更好的基本可行解，在进行检验。如此迭代，直至最后找到最优解，或判定无界。

- 两个主要问题：
  - 寻找初始解
  - 如何判别和迭代（先考虑）

确定初始的基本可行解

确定初始的基本可行解等价于确定初始的可行基，一旦初始的可行基确定了，那么对应的初始基本可行解也就唯一确定

为了讨论方便，不妨假设在标准型线性规划中，系数矩阵A中前m个系数列向量恰好构成一个可行基，即

A=（B N），其中

B=（P_1，P_2，…P_m）为基变量x_1，x_2，…x_m的系数列向量构成的可行基,

N=(P_{m+1}，P_{m+2}，…P_n)为非基变量x_{m+1}，x_{m+2}，…x_n的系数列向量构成的矩阵。

所以约束方程 $AX=b$ 就可以表示为

$$AX=(BN)\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix}=BX_B+NX_N=b$$

用可行基B的逆阵B^{-1}左乘等式两端，再通过移项可推得：

$$X_B=B^{-1}b-B^{-1}NX_N$$

若令所有非基变量 $X_N=0$，则基变量 $X_B=B^{-1}b$

由此可得初始的基本解 $X=\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$

$$AX=b \rightarrow BX_B+NX_N=b \rightarrow X_B=B^{-1}b-B^{-1}NX_N \rightarrow X_N=0, X_B=B^{-1}b$$

- **问题：**

➢ 要判断**m**个系数列向量是否恰好构成一个基并不是一件容易的事。

基由系数矩阵A中**m**个线性无关的系数列向量构成。

但是要判断**m**个系数列向量是否线性无关并非易事。

➢ 即使系数矩阵A中找到了一个基**B**，也不能保证该基恰好是可行基。

因为不能保证基变量$X_B=B^{-1}b\geq 0$。

➢ 为了求得基本可行解 $X=\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$，必须求基B的逆阵$B^{-1}$。

但是求逆阵B^{-1}也是一件麻烦的事。

- **结论：**
- 在线性规划标准化过程中设法得到一个**m** 阶单位矩阵**I**作为初始可行基B，

为了设法得到一个m阶单位矩阵I作为初始可行基Ｂ，可在线性规划标准化过程中作如下处理：

- 若在化标准形式前，m个约束方程都是“≤”的形式,
  那么在化标准形时只需在一个约束不等式左端都加上一个松弛变量x_{n+i} (i=1, 2, …, m)。

- 若在化标准形式前，约束方程中有“≥”不等式,
  那么在化标准形时除了在方程式左端减去剩余变量使不等式变成等式以外，还必须在左端再加上一个非负新变量，称为人工变量.

- 若在化标准形式前，约束方程中有等式方程，那么可以直接在等式左端添加人工变量。

■判断现行的基本可行解是否最优

假如已求得一个基本可行解 $X=\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$

将这一基本可行解代入目标函数，可求得相应的目标函数值

$$Z=CX=(C_B C_N)\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}=C_B B^{-1}b$$

其中 $C_B=(c_1,c_2,\cdots c_m)$, $C_N=(c_{m+1},c_{m+2},\cdots c_n)$分别表示基变量和

非基变量所对应的价值系数子向量。

要判定 $Z=C_B B^{-1} b$ 是否已经达到最大值，只需将 $X_B = B^{-1}b - B^{-1}NX_N$ 代入目标函数，使目标函数用非基变量表示，即：

$$Z = CX = (C_B\ C_N)\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix}$$

$$= C_B X_B + C_N X_N = C_B (B^{-1}b - B^{-1}NX_N) + C_N X_N$$

$$= C_B B^{-1}b + (C_N - C_B B^{-1}N) X_N$$

$$\triangleq C_B B^{-1}b + \sigma_N X_N \ = C_B B^{-1}b + (\sigma_{m+1}, \sigma_{m+1}, \cdots\ \sigma_n)\begin{pmatrix} x_{m+1} \\ x_{m+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

其中 $\sigma_N = C_N - C_B B^{-1}N = (\sigma_{m+1}, \sigma_{m+1}, \cdots\ \sigma_n)$ 称为非基变量 X_N 的检验向量，它的各个分量称为检验数。若 $\boldsymbol{\sigma_N}$ 的每一个检验数均小于等于 **0**，即 $\boldsymbol{\sigma_N \le 0}$，那么现在的基本可行解就是最优解。

定理1：最优解判别定理

对于线性规划问题 $\max Z=CX,\quad D=\left\{X\in R^n/AX=b,X\geq 0\right\}$

若某个基本可行解所对应的检验向量 $\sigma_N=C_N-C_BB^{-1}N\leq 0$，

则这个基本可行解就是最优解。

$$Z=C_BB^{-1}b+(\sigma_{m+1},\sigma_{m+1},\cdots\ \sigma_n)\begin{pmatrix} x_{m+1} \\ x_{m+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

定理2：无穷多最优解判别定理

若 $X=\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ 是一个基本可行解，所对应的检验向量

$\sigma_N=C_N-C_BB^{-1}N\leq 0$，其中存在一个检验数 $\sigma_{m+k}=0$，

则线性规划问题有无穷多最优解。

■ 基本可行解的改进

如果现行的基本可行解X不是最优解，即在检验向量$\sigma_N = C_N - C_B B^{-1} N$中存在正的检验数，则需在原基本可行解X的基础上寻找一个新的基本可行解，并使目标函数值有所改善。具体做法是：

- 先从检验数为正的非基变量中确定一个换入变量，使它从非基变量变成基变量（将它的值从零增至正值），
- 再从原来的基变量中确定一个换出变量，使它从基变量变成非基变量（将它的值从正值减至零）。

由此可得一个新的基本可行解，由 $Z = C_B B^{-1} b + (\sigma_{m+1}, \sigma_{m+1}, \cdots \sigma_n)\begin{pmatrix} x_{m+1} \\ x_{m+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 可知，这样的变换一定能使目标函数值有所增加。

换入变量和换出变量的确定：

●换入变量的确定— 最大增加原则

假设检验向量 $\sigma_N = C_N - C_B B^{-1} N = (\sigma_{m+1}, \sigma_{m+2}, \cdots, \sigma_n)$

若其中有两个以上的检验数为正，那么为了使目标函数值增加得快些，通常要用“最大增加原则”，即选取最大正检验数所对应的非基变量为换入变量，即若

$$\max\left\{\sigma_j / \sigma_j > 0, m+1 \le j \le n\right\} = \sigma_{m+k}$$

则选取对应的 x_{m+k} 为换入变量，

由于 $\sigma_{m+k} > 0$ 且为最大，

因此当 x_{m+k} 由零增至正值，

可使目标函数值 $Z = C_B B^{-1} b + (\sigma_{m+1}, \sigma_{m+1}, \cdots \sigma_n)\begin{pmatrix} x_{m+1} \\ x_{m+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

最大限度的增加。

- 换出变量的确定— 最小比值原则

如果确定 x_{m+k} 为换入变量，方程

$$X_B = B^{-1}b - B^{-1}NX_N \Rightarrow X_B = B^{-1}b - B^{-1}P_{m+k}x_{m+k}$$

其中 P_{m+k} 为A中与 x_{m+k} 对应的系数列向量。

现在需在 $X_B=(x_1,x_2,\cdots x_m)^T$ 中确定一个基变量为换出变量。

当 x_{m+k} 由零慢慢增加到某个值时，X_B 的非负性可能被打破。为保持解的可行性，可以按最小比值原则确定换出变量：

若

$$\min\left\{\frac{(B^{-1}b)_i}{(B^{-1}P_{m+k})_i} / (B^{-1}P_{m+k})_i > 0, 1 \le i \le m\right\} = \frac{(B^{-1}b)_l}{(B^{-1}P_{m+k})_l}$$

则选取对应的基变量 x_l 为换出变量。

定理3：无最优解判别定理

若 $X=\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ 是一个基本可行解，有一个检验数 $\sigma_{m+k} > 0$，

但是 $B^{-1}P_{m+k} \le 0$ 则该线性规划问题无最优解。

证：令 $x_{m+k} = \lambda, (\lambda > 0)$ 则得新的可行解

将上式代入 $X_B = B^{-1}b - B^{-1}P_{m+k}x_{m+k} = B^{-1}b - B^{-1}P_{m+k}\lambda$

$$Z = C_B B^{-1}b + (\sigma_{m+1}, \ldots \sigma_{m+k}, \ldots \sigma_n)\begin{pmatrix} x_{m+1} \\ \vdots \\ \lambda \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C_B B^{-1}b + \sigma_{m+k}\lambda$$

因为 $\sigma_{m+k} > 0$，故当$\lambda \to +\infty$时，$Z \to +\infty$

■ 用初等变换求改进了的基本可行解

假设B是线性规划 $\max Z=CX, AX=b, X\geq 0$ 的可行基，则

$$AX=b \Rightarrow (BN)\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix} = b \Rightarrow (I, B^{-1}N)\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix} = B^{-1}b$$

令非基变量 $X_N=0$，则基变量 $X_B=B^{-1}b$

可得基本可行解 $X=\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$

➢ 用逆阵 B^{-1} 左乘约束方程组的两端，等价于对方程组施以一系列的初等“行变换”。变换的结果是将系数矩阵A中的可行基B变换成单位矩阵I，把非基变量系数列向量构成的矩阵N变换成 $B^{-1}N$，把资源向量b变换成 $B^{-1}b$

由于行初等变换后的方程组 $(I,B^{-1}N)\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix}=B^{-1}b$

与原约束方程组 $AX=b$ 或 $(B,N)\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix}=b$ 同解

且改进了的基本可行解 X' 只是在 X 的基变量的基础上用一个换入变量替代其中一个换出变量，其它的基变量仍然保持不变。这些基变量的系数列向量是单位矩阵I中的单位向量。为了求得改进的基本可行解 X'，只需对增广矩阵

$$(I,B^{-1}N,B^{-1}b)$$

施行初等行变换，将换入变量的系数列向量变换成换出变量所对应的单位向量即可。

判别和迭代

- 假定 rank(A) = $m<n$, 且假定已找到一个非退化的基本可行解,即找到一个基B。则$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$可写成

$$\mathbf{x}_B+B^{-1}N\mathbf{x}_N=B^{-1}\mathbf{b} \qquad (1)$$

记

$$B=(a_1,\ldots,a_m)$$

$$\bar{\mathbf{a}}_j=B^{-1}\mathbf{a}_j=(\bar{a}_{1j},\ldots,\bar{a}_{mj})^T,\ j=1,\ldots,n$$

$$\bar{\mathbf{b}}=B^{-1}\mathbf{b}=(\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_m)^T$$

$$\bar{N}=B^{-1}N$$

则上式(1)可写成$\mathbf{x}_B+\bar{N}\mathbf{x}_N=\bar{\mathbf{b}} \qquad (2)$

显然，不同的基对应的方程表达式也不同。

式(2)称为基B的典则方程组，简称典式。

判别和迭代

$$\mathbf{x}_B + \bar{N}\mathbf{x}_N = \bar{\mathbf{b}} \qquad (2—2)$$

显然，不同的基对应的方程表达式也不同。

式(2)称为基B的典则方程组，简称典式。

若$\bar{\mathbf{b}} \geq 0$,则式(2)就对应着基本可行解$\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{b}} \\ 0 \end{pmatrix}$.

将目标函数也做相应的变换，

$$z = \mathbf{c}\mathbf{x} = \mathbf{c}_B\bar{\mathbf{b}} - \left(\mathbf{c}_B\bar{N} - \mathbf{c}_N\right)\mathbf{x}_N = \mathbf{c}_B\bar{\mathbf{b}} - \sum_{j=m+1}^{n}\left(\mathbf{c}_B\bar{\mathbf{a}}_j - c_j\right)\mathbf{x}_j \qquad (3)$$

用z_0表示在基本可行解 $\bar{\mathbf{x}}$处的目标函数值，

则有z_0＝$\mathbf{c}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{c}_B\bar{\mathbf{b}}$（即上式的常数项）

判别和迭代

因为$\bar{\mathbf{a}}_1,\ldots\bar{\mathbf{a}}_m$是线性无关向量，

故当$j=1,\ldots,m$时

$\mathbf{c}_B\bar{\mathbf{a}}_j-c_j=0.$

引入记号

$\zeta_j=\mathbf{c}_B\bar{\mathbf{a}}_j-c_j, j=1,\ldots,n$

或用向量形式

$\zeta = \mathbf{c}_B B^{-1}A-\mathbf{c}=(\zeta_B,\zeta_N)=(\mathbf{0},\mathbf{c}_B B^{-1}N-\mathbf{c}_N)$

则式(3)改写成$z=\mathbf{c}_B\bar{\mathbf{b}}-\zeta\mathbf{x}.$

判别和迭代

$$z=\mathbf{c}_B\bar{\mathbf{b}}-\zeta\mathbf{x},\quad \zeta=\mathbf{c}_B B^{-1}A-\mathbf{c}=(\zeta_B,\zeta_N)=(\mathbf{0},\mathbf{c}_B B^{-1}N-\mathbf{c}_N)$$

经过变量变换后，LP问题可叙述成

$$\min z=z_0-\zeta\mathbf{x} \tag{4}$$

$$s.t.\quad \mathbf{x}_B+B^{-1}N\mathbf{x}_N=\bar{\mathbf{b}}, \tag{5}$$

$$\mathbf{x}\geq\mathbf{0}.$$

定理2.1：若（4）中$\zeta\leq 0$，则$\bar{\mathbf{x}}$为最优解。

定理2.2：若（4）中ζ存在某一分量$\zeta_k>0$，且$\bar{\mathbf{a}}_k\leq\mathbf{0}$，则原问题无解。

定理2.3：若（4）中有$\zeta_k>0$，且$\bar{\mathbf{a}}_k$至少存在一个正分量，则能找到基本可行解$\hat{\mathbf{x}}$，使得$\mathbf{c}\hat{\mathbf{x}}<\mathbf{c}\bar{\mathbf{x}}$。

单纯形法的计算步骤

ζ称之为检验向量。

在迭代过程中，如果ζ有不止一个正分量，

则为了使目标函数下降得较快，

一般取最大的分量ζ_k所对应的列向量$\mathbf{a}_k$进入基。

1. 找初始的可行基;
2. 求出对应的典式;
3. 求$\zeta_k = \max\{\zeta_j \mid j = 1,\ldots,n\}$
4. 若$\zeta_k \le 0$，停止。已找到最优解$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{b}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$及最优值$z = \mathbf{c}_B \overline{\mathbf{b}}$
5. 若$\overline{\mathbf{a}}_k \le \mathbf{0}$，停止，原问题无界。
6. 求最小比$\dfrac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rk}} = \min\left\{ \dfrac{\overline{b}_i}{\overline{a}_{ik}} \middle| \overline{a}_{ik} > 0 \right\}$
7. 以$\mathbf{a}_k$代替$\mathbf{a}_{Br}$得到新的基，回到2.

例1 $\max Z=5x_1+2x_2+3x_3-x_4+x_5$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+x_4 = 8 \\ 3x_1+4x_2+x_3+x_5=7 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geq 0 \end{cases}$$

$$C=(5,2,3,-1,1)$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b=\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

解：

(1)确定初始的基本可行解

$B=(P_4P_5)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，基变量 x_4,x_5，非基变量 x_1,x_2,x_3

$$X_B=\begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix},X_N=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},N=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix},\begin{matrix} C_B=(-1,1) \\ C_N=(5,2,3) \end{matrix},b=\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$X_N=0 \rightarrow X_B=B^{-1}b=\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow X=(0,0,0,8,7)^T$$

$$Z=C_BB^{-1}b=(-1,1)\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}=-1$$

$$X_B=\begin{pmatrix}x_4\\x_5\end{pmatrix},X_N=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},N=\begin{pmatrix}1&2&2\\3&4&1\end{pmatrix},\begin{matrix}C_B=(-1,1)\\C_N=(5,2,3)\end{matrix},b=\begin{pmatrix}8\\7\end{pmatrix}$$

---

(2) 检验 $X=(0,0,0,8,7)^T$ 是否最优

检验向量 $\sigma_N=C_N-C_BB^{-1}N=(5,2,3)-(-1,1)\begin{pmatrix}1&2&2\\3&4&1\end{pmatrix}$

$$=(5,2,3)-(2,2,-1)=(3,\ 0,\ 4)$$

$$\begin{matrix}\uparrow&\uparrow&\uparrow\\\sigma_1&\sigma_2&\sigma_3\end{matrix}$$

因为$\boldsymbol{\sigma_1}$**=3**，$\boldsymbol{\sigma_3}$**=4** 均大于零,

所以 $X=(0,0,0,8,7)^T$ 不是最优解

$$X_B=\begin{pmatrix}x_4\\x_5\end{pmatrix},X_N=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},N=\begin{pmatrix}1&2&2\\3&4&1\end{pmatrix},\begin{matrix}C_B=(-1,1)\\C_N=(5,2,3)\end{matrix},b=\begin{pmatrix}8\\7\end{pmatrix}$$

$$\sigma_N=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)=(3,0,4)$$

（**3**）基本可行解 $X=(0,0,0,8,7)^T$ 的改进

① 选取换入变量

因为**max{3，4}=4**，取$\mathbf{x_3}$为换入变量。

② 选取换出变量

$$B^{-1}b=\begin{pmatrix}8\\7\end{pmatrix},B^{-1}P_3=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\le 0 \quad 且 \qquad \min\left\{\frac{8}{2},\frac{7}{1}\right\}=\frac{8}{2}$$

选取$\mathbf{x_4}$为换出变量**.**

$$\begin{pmatrix}x_4\\x_5\end{pmatrix}=B^{-1}b-B^{-1}P_3x_3=\begin{pmatrix}8\\7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}x_3$$

$$X_B=\begin{pmatrix}x_4\\x_5\end{pmatrix},X_N=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},N=\begin{pmatrix}1&2&2\\3&4&1\end{pmatrix},\begin{matrix}C_B=(-1,1)\\C_N=(5,2,3)\end{matrix},b=\begin{pmatrix}8\\7\end{pmatrix}$$

（**4**）求改进了的基本可行解 X'

对约束方程组的增广矩阵施以初等行变换，使换入变量**x_3**所对应的系数列向量 $P_3=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ 变换成换出变量**x_4**所对应的单位向量 $P_4=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，注意保持基变量**$x_5$**的系数列向量 $P_5=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 为单位向量不变

$$\begin{pmatrix}1&2&\boxed{2}&\boxed{1}&0&8\\3&4&\boxed{1}&\boxed{0}&1&7\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第一行除以２}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&1&1&\frac{1}{2}&0&4\\3&4&1&0&1&7\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第二行减去第一行}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&1&1&\frac{1}{2}&0&4\\\frac{5}{2}&3&0&\frac{-1}{2}&1&3\end{pmatrix}$$

$$C=(5,2,3,-1,1) \qquad C=(5,2,3,-1,1)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} \frac{1}{2} & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 4 \\ \frac{5}{2} & 3 & 0 & \frac{-1}{2} & 1 & 3 \end{array}\right)$$

可得改进的基本可行解。

$B=(P_3P_5)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，基变量 X_3, X_5 非基变量 X_1, X_2, X_4

$$X_B=\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix}, X_N=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, N=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & 3 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}, \begin{matrix} C_B=(3,1) \\ C_N=(5,2,-1) \end{matrix}, b=\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$X_N=0 \rightarrow X_B=B^{-1}b=\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$ 基本可行解 $X=(0,0,4,0,3)^T$

目标函数值 $Z=C_BB^{-1}b=(3,1)\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}=15$

易见目标函数值比原来的**Z=-1**增加了，再转向步骤**(2)**

$$X_B=\begin{pmatrix}x_3\\x_5\end{pmatrix},X_N=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_4\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},N=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\\\frac{5}{2}&3&\frac{-1}{2}\end{pmatrix},\begin{matrix}C_B=(3,1)\\C_N=(5,2,-1)\end{matrix},b=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$$

（2）检验 $X=(0,0,4,0,3)^T$是否最优。

检验向量 $$\sigma_N=C_N-C_BB^{-1}N=(5,2,-1)-(3,1)\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\\\frac{5}{2}&3&\frac{-1}{2}\end{pmatrix}$$

$$=(5,2,-1)-(4,6,1)=(1,\ -4,\ -2)$$

$$\begin{matrix}\uparrow&\uparrow&\uparrow\\\sigma_1&\sigma_2&\sigma_4\end{matrix}$$

因为 $\sigma_1=1>0$，

所以 $X=(0,0,4,0,3)^T$仍不是最优解。

$$X_B=\begin{pmatrix}x_3\\x_5\end{pmatrix},X_N=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_4\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},N=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\\\frac{5}{2}&3&\frac{-1}{2}\end{pmatrix},\begin{matrix}C_B=(3,1)\\C_N=(5,2,-1)\end{matrix},b=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$$

（3）基本可行解 $X=(0,0,4,0,3)^T$ 的改进

① 选取换入变量

因为 $\sigma_1=1>0$，取 x_1 为换入变量

② 选取换出变量

$$B^{-1}b=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix},B^{-1}P_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{5}{2}\end{pmatrix}\leq 0\text{ 且 }\min\left\{\frac{4}{1/2},\frac{3}{5/2}\right\},=\frac{3}{5/2}$$

选取 x_5 为换出变量

$$\begin{pmatrix}x_3\\x_5\end{pmatrix}=B^{-1}b-B^{-1}P_1x_1=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1/2\\5/2\end{pmatrix}x_1$$

$$X_B=\begin{pmatrix}x_3\\x_5\end{pmatrix},X_N=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_4\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},N=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\\\frac{5}{2}&3&\frac{-1}{2}\end{pmatrix},\begin{matrix}C_B=(3,1)\\C_N=(5,2,-1)\end{matrix},b=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$$

（4）求改进了的基本可行解 X''

对约束方程组的增广矩阵施以初等行变换，使换入变量 x_1 所对应的系数列向量 $P_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{5}{2}\end{pmatrix}$ 变换成换出变量 x_5 所对应的单位向量 $P_5=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}\frac{1}{2}\\\frac{5}{2}\end{matrix}}&\begin{matrix}1\\3\end{matrix}&\begin{matrix}1\\0\end{matrix}&\begin{matrix}\frac{1}{2}\\\frac{-1}{2}\end{matrix}&\boxed{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}}&\begin{matrix}4\\3\end{matrix}\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第二行乘以}2/5}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&1&1&\frac{1}{2}&0&4\\1&\frac{6}{5}&0&\frac{-1}{5}&\frac{2}{5}&\frac{6}{5}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第一行减以第二行的}1/2\text{倍}}\begin{pmatrix}0&\frac{2}{5}&1&\frac{3}{5}&\frac{-1}{5}&\frac{17}{5}\\1&\frac{6}{5}&0&\frac{-1}{5}&\frac{2}{5}&\frac{6}{5}\end{pmatrix}$$

$$C=(5,2,3,-1,1) \qquad C=(5,2,3,-1,1)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \frac{1}{2} & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 4 \\ \frac{5}{2} & 3 & 0 & \frac{-1}{2} & 1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & \frac{2}{5} & 1 & \frac{3}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{17}{5} \\ 1 & \frac{6}{5} & 0 & \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{6}{5} \end{array}\right)$$

可得改进的基本可行解。

$B=(P_3P_1)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，基变量 x_3,x_1 非基变量 x_2,x_4,x_5

$$X_B=\begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}, X_N=\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, N=\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{6}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}, \begin{matrix} C_B=(3,5) \\ C_N=(2,-1,1) \end{matrix}, b=\begin{pmatrix} \frac{17}{5} \\ \frac{6}{5} \end{pmatrix}$$

$X_N=0 \rightarrow X_B=B^{-1}b=\begin{pmatrix} \frac{17}{5} \\ \frac{6}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow$ 基本可行解 $X=(\frac{6}{5},0,\frac{17}{5},0,0)^T$

目标函数值 $Z=C_BB^{-1}b=(3,5)\begin{pmatrix} \frac{17}{5} \\ \frac{6}{5} \end{pmatrix}=\frac{81}{5}$ **比Z=15增加了，再转向步骤(2)**

$$X_B=\begin{pmatrix}x_3\\x_1\end{pmatrix},X_N=\begin{pmatrix}x_2\\x_4\\x_5\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},N=\begin{pmatrix}\frac{2}{5}&\frac{3}{5}&\frac{-1}{5}\\\frac{6}{5}&\frac{-1}{5}&\frac{2}{5}\end{pmatrix},\begin{matrix}C_B=(3,5)\\C_N=(2,-1,1)\end{matrix},b=\begin{pmatrix}\frac{17}{5}\\\frac{6}{5}\end{pmatrix}$$

（2）检验 $X''=(\frac{6}{5},0,\frac{17}{5},0,0)^T$ 是否最优。

检验向量

$$\sigma_N=C_N-C_BB^{-1}N=(2,-1,1)-(3,5)\begin{pmatrix}\frac{2}{5}&\frac{3}{5}&\frac{-1}{5}\\\frac{6}{5}&\frac{-1}{5}&\frac{2}{5}\end{pmatrix}$$

$$=(2,-1,1)-(\frac{36}{5},\frac{4}{5},\frac{7}{5})=(\underset{\substack{\uparrow\\\sigma_2}}{\frac{-26}{5}},\underset{\substack{\uparrow\\\sigma_4}}{\frac{-9}{5}},\underset{\substack{\uparrow\\\sigma_5}}{\frac{-2}{5}})$$

因为所有检验数均小于零,

所以 $X^*=X''=(\frac{6}{5},0,\frac{17}{5},0,0)^T$ 是最优解, $Z^*=\frac{81}{5}$

2.2 单纯形表

根据θ和$\hat{\mathbf{x}}$的构造方式可知，得到改进的基本可行解——

即使原来的非基变量x_k变成取正值的基本变量，

同时使原来的基本变量x_r值为零（变成非基变量）。

等价地，基$B=[\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_m]$变成另一个基$\hat{B}=[\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_r,\mathbf{a}_k,\mathbf{a}_{r+1},\ldots\mathbf{a}_m]$

* 换基变换

* x_k称为进基变量，x_r为离基变量。

在基B下，典式的系数增广矩阵为

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
x_1 & \ldots & x_r & \ldots & x_m & x_{m+1} & \ldots & x_k & \ldots & x_n & \\
1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \bar{a}_{1,m+1} & \ldots & \bar{a}_{1,k} & \ldots & \bar{a}_{1,n} & \bar{b}_1 \\
\vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 & \bar{a}_{r,m+1} & \ldots & \bar{a}_{r,k} & \ldots & \bar{a}_{r,n} & \bar{b}_r \\
\vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 & \bar{a}_{m,m+1} & \ldots & \bar{a}_{m,k} & \ldots & \bar{a}_{m,n} & \bar{b}_m
\end{array}
$$

x_r与x_k的地位互换。

第k列通过初等变换变成单位向量$\mathbf{e}_r$.

1)第r行$\bar{\mathbf{a}}_r^T$除以$\bar{a}_{rk}$, $\hat{\mathbf{a}}_r^T=\bar{\mathbf{a}}_r^T/\bar{a}_{rk}$

2)对第i行（$i\neq r$）$\bar{\mathbf{a}}_i^T$，$\hat{\mathbf{a}}_r^T=\bar{\mathbf{a}}_i^T-\hat{\mathbf{a}}_r^T\bar{a}_{ik}$

即第i行减去新的第r行$\hat{\mathbf{a}}_r^T$乘以$\bar{a}_{ik}$

最后一列正是基$\hat{B}$所对应的基本可行解。

$$\hat{b}_r=\bar{b}_r/\bar{a}_{rk}, \hat{b}_i=\bar{b}_i-(\bar{b}_r/\bar{a}_{rk})\bar{a}_{ik}, i\neq r$$

换基时，目标函数$z=\mathbf{c}_B\bar{\mathbf{b}}-\left(\mathbf{c}_B\bar{N}-\mathbf{c}_N\right)\mathbf{x}_N$也要做相应的调整，即将$B$换成$\hat{B}$。

将上式的等价形式

$z+\left(\mathbf{c}_B B^{-1}N-\mathbf{c}_N\right)\mathbf{x}_N=\mathbf{c}_B\bar{\mathbf{b}}$，或$z+\zeta_N\mathbf{x}_N=z_0$

看成一个方程，放在典式中一同进行初等变换。

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
 & z & x_1 & \cdots & x_r & \cdots & x_m & x_{m+1} & \cdots & x_k & \cdots & x_n & RHS \\
z & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \zeta_{m+1} & \cdots & \zeta_k & \cdots & \zeta_n & z_0 \\
x_1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \bar{a}_{1,m+1} & \cdots & \bar{a}_{1,k} & \cdots & \bar{a}_{1,n} & \bar{b}_1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
x_r & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \bar{a}_{r,m+1} & \cdots & \bar{a}_{r,k} & \cdots & \bar{a}_{r,n} & \bar{b}_r \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
x_m & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \bar{a}_{m,m+1} & \cdots & \bar{a}_{m,k} & \cdots & \bar{a}_{m,n} & \bar{b}_m
\end{array}
$$

单纯形表

转轴列

转轴行

转轴元

单纯形表可简记为

$$
\begin{array}{ccccc}
 & z & \mathbf{x}_B & \mathbf{x}_N & RHS \\
z & 1 & \mathbf{0} & \boldsymbol{\zeta}_N & z_0 \\
\mathbf{x}_B & \mathbf{0} & I & \bar{N} & \bar{\mathbf{b}}
\end{array}
$$

上述变换又称之为旋转（pivot），
类似于解线性方程组的主元消去法.

□表格单纯形法

通过例 1 我们发现，在单纯形法的求解过程中，有下列重要指标：

- 每一个基本可行解的检验向量 $\sigma_N = C_N - C_B B^{-1} N$

  根据检验向量可以确定所求得的基本可行解是否为最优解。如果不是最优又可以通过检验向量确定合适的换入变量。

- 每一个基本可行解所对应的目标函数值 $Z = C_B B^{-1} b$

  通过目标函数值可以观察单纯形法的每次迭代是否能使目标函数值有效地增加，直至求得最优目标函数为止。

➢ 在单纯形法求解过程中，每一个基本可行解X都以某个经过初等行变换的约束方程组中的单位矩阵I为可行基。

当B＝I 时，$B^{-1} = I$，易知：$\sigma_N = C_N - C_B N$　$Z = C_B b$

可将这些重要结论的计算设计成如下一个简单的表格，即单纯形表来完成：

<table>
<tr><td colspan="3">C</td><td>C_B</td><td>C_N</td><td rowspan="2">θ</td></tr>
<tr><td>C_B</td><td>X_B</td><td>b</td><td>$X_1 \quad X_2 \quad \cdots \quad X_m$</td><td>$X_{m+1} \quad X_{m+2} \quad \cdots \quad X_n$</td></tr>
<tr><td>C_1
C_2
.
.
C_m</td><td>X_1
X_2

.
X_m</td><td>b_1
b_2
.
.
b_m</td><td>I</td><td>N</td><td>θ_1
θ_2
.
.
θ_m</td></tr>
<tr><td colspan="2">Z</td><td>$C_B b$</td><td>0</td><td>$C_N - C_B N$</td><td></td></tr>
</table>

例2、试利用单纯形表求例1中的最优解解：

$$\max Z=5x_1+2x_2+3x_3-x_4+x_5 \qquad C=(5,2,3,-1,1)$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+x_4 = 8 \\ 3x_1+4x_2+x_3+x_5=7 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 \ge 0 \end{cases}$$

$$(Ab)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

得初始的单纯形表：

C			5	2	3	-1	1	Θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
-1	x_4	8	1	2	2	1	0	
1	x_5	7	3	4	1	0	1	
Z		-1	3	0	4	0	0	

$Z=C_Bb \qquad \sigma_N=C_N-C_BN$

初始基本可行解 $X=(0,0,0,8,7)^T$ Z= -1,

C			5	2	3	-1	1	Θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
-1	x_4	8	1	2	2	1	0	8/2
1	x_5	7	3	4	1	0	1	7/1
Z		-1	3	0	4	0	0	

X_3 换入变量，X_4换出变量， 2为主元进行旋转变换

C			5	2	3	-1	1	Θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
3	x_3	4	1/2	1	1	1/2	0	
1	x_5	3	5/2	3	0	-1/2	1	
Z		15	1	-4	0	-2	0	

基本可行解 $X=(0,0,4,0,3)^T$， $Z=15$,

C			5	2	3	-1	1	Θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
3	x_3	4	1/2	1	1	1/2	0	$4/_{1/2}$
1	x_5	3	5/2	3	0	-1/2	1	$3/_{5/2}$
Z		15	1	-4	0	-2	0	

x_1 换入变量，x_5换出变量， 5 / 2 为主元进行旋转变换

C			5	2	3	-1	1	Θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
3	x_3	17/5	0	2/5	1	3/5	-1/5	
5	x_1	6/5	1	6/5	0	-1/5	2/5	
Z		81/5	0	-26/5	0	-9/5	-2/5	

$\sigma_N = C_N - C_B N \leq 0$ 最优解 $X^* = \left(\frac{6}{5}, 0, \frac{17}{5}, 0, 0\right)^T$ 最优值 $Z^* = \frac{81}{5}$

2.3 初始解:两阶段法

设原问题为

$$\begin{aligned} &\min \mathbf{cx} \\ &s.t.\ \ A\mathbf{x} = \mathbf{b}\ (\mathbf{b} \ge \mathbf{0}) \\ &\qquad \mathbf{x} \ge \mathbf{0} \end{aligned}$$

引入m个人工变量$\mathbf{x}_a = (x_{n+1},\ldots,x_{n+m})^T$,考虑如下辅助问题

$$\begin{aligned} &\min g = \mathbf{1x}_a \\ &s.t.\ \ A\mathbf{x} + \mathbf{x}_a = \mathbf{b} \\ &\qquad \mathbf{x}, \mathbf{x}_a \ge 0 \end{aligned}$$

其中$\mathbf{1} = (1,\ldots,1)$。设原问题的可行域为$D$,辅助问题的可行域为$D'$,

显然$\mathbf{x} \in D \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 0 \end{pmatrix} \in D'$。而$\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 0 \end{pmatrix} \in D' \Leftrightarrow \min g = 0.$

2.3 初始解:两阶段法

m个人工变量$\mathbf{x}_a=(x_{n+1},\ldots,x_{n+m})^T$,考虑如下辅助问题

$$\begin{aligned}&\min g=\mathbf{1x}_a\\ &s.t.\quad A\mathbf{x}+\mathbf{x}_a=\mathbf{b}\\ &\qquad\quad \mathbf{x},\mathbf{x}_a\geq 0\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\0\end{pmatrix}\in D'\Leftrightarrow \min g=0.$$

对于辅助问题来说，一个基本可行解是$\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\\mathbf{x}_a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{b}\end{pmatrix}$,

于是可进行单纯形迭代求解，其结果有两种可能：

1) $\min g>0$。说明$D=\varnothing$.

2) $\min g=0$。这是自然有$\mathbf{x}_a=0$,把它除去后即得到原问题的一个可行解。

2.3 初始解:两阶段法

m个人工变量$\mathbf{x}_a = (x_{n+1},\dots,x_{n+m})^T$,得到辅助问题

$$\begin{aligned} &\min g = \mathbf{1}\mathbf{x}_a \\ &s.t. \quad A\mathbf{x} + \mathbf{x}_a = \mathbf{b} \\ &\qquad\quad \mathbf{x}, \mathbf{x}_a \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 0 \end{pmatrix} \in D' \Leftrightarrow \min g = 0.$$

* 若此时所有人工变量都是非基变量，则解为基本可行解。
* 否则，进行旋转变换消去基变量中的人工变量。

  设基变量x_r为人工变量，

  ▹ 取第r行的前n个元素中不为零的元素$\bar{a}_{rs}$为转轴元进行变换，
  则非人工变量x_s进入基变量，同时从基本量消除了人工变量x_r。

  ▹ 若第r行的前n个元素都为零，则直接去掉该行以及对应的人工变量。

2.4 初始解:大M法

设原问题为

$$\begin{aligned} &\min \mathbf{cx} \\ &s.t.\ \ A\mathbf{x} = \mathbf{b}\ (\mathbf{b} \geq \mathbf{0}) \\ &\qquad\quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

引入$\mathbf{x}_a \in E^m$及足够大的正数M,得到新问题如下

$$\begin{aligned} &\min \mathbf{cx} + M\mathbf{1}\mathbf{x}_a \\ &s.t.\ \ A\mathbf{x} + \mathbf{x}_a = \mathbf{b} \\ &\qquad\quad \mathbf{x}, \mathbf{x}_a \geq 0 \end{aligned}$$

其中$\mathbf{1} = (1,\ldots,1)$。只要$M$取得足够大，那么可以说

x是原问题的最优解$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 0 \end{pmatrix}$是新问题的最优解。

而新问题有初始解$\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$，因此总可以用单纯形法求解。

2.5 退化与防止循环

- 若单纯形表中右端向量存在分量为0，即出现退化解的情况下，可能出现循环。为了避免循环，需要再补充一些旋转规则。
  - 字典序方法
  - Bland规则

字典序方法

非零向量$\mathbf{x}$,并且第一个非零分量是非负的，称为按字典序非负，记为$\mathbf{x} \succ = \mathbf{0}$。

对向量$\mathbf{x}, \mathbf{y}$,若$\mathbf{x} - \mathbf{y} \succ = \mathbf{0}$,则称$\mathbf{x}$按字典序大于等于$\mathbf{y}$.

若一组$\mathbf{x}^i$,有$\mathbf{x}^t$,使得对所有$\mathbf{x}^i$,均有$\mathbf{x}^i \succ = \mathbf{x}^t$,则称$\mathbf{x}^t$为该组向量中按字典序最小的。

记为：$\mathbf{x}^t = lex\min \mathbf{x}^i$.

字典序法就是在选定了进基变量x_k后，令

$$\frac{\mathbf{p}_r}{\bar{a}_{rk}} = lex\min\left\{\frac{\mathbf{p}_i}{\bar{a}_{ik}} \middle| \bar{a}_{ik} > 0, i = 1, \ldots, m\right\}$$,其中$\mathbf{p}_i$为$\left(\bar{\mathbf{b}}, B^{-1}\right)$的第$i$行。

Bland规则

1) 选下标最小的正检验数ζ_k所对应的非基变量x_k作为进基变量。

2) 离基变量x_l的确定：如果同时有几个$\dfrac{b_r}{\bar{a}_{rk}}$达到最小，就选其中下标最小的那个基变量作为离基变量。即

$$l=\min\left\{r\left|\frac{b_r}{\bar{a}_{rk}}=\min\left\{\frac{b_i}{\bar{a}_{ik}}\middle|\bar{a}_{ik}>0\right\}\right.\right\}$$

- Bland规则的优点是简单易行，但缺点是只考虑最小下标，而不考虑目标函数值下降的快慢。故其效率比字典序或原来单纯形法低。
- 在实际中，退化是常见的，但退化不一定产生循环。事实上，产生循环是较罕见的。

2.6 修改单纯形法

- 当LP问题的规模很大时，如何减少存储量和计算时间，就是一个必须加以考虑的问题。在实际中，大多采用修改单纯形法。

逆矩阵法

一般单纯形表为

$$\begin{bmatrix} & z & \mathbf{x}_B & \mathbf{x}_N & RHS \\ z & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{c}_B B^{-1}N-\mathbf{c}_N & \mathbf{c}_B B^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{x}_B & \mathbf{0} & I & B^{-1}N & B^{-1}\mathbf{b} \end{bmatrix}$$

逆矩阵法对每一张单纯形表，仅存贮下列数据

$$\begin{bmatrix} \mathbf{w} & z_o \\ B^{-1} & \bar{\mathbf{b}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_B B^{-1} & \mathbf{c}_B B^{-1}\mathbf{b} \\ B^{-1} & B^{-1}\mathbf{b} \end{bmatrix},$$ 该表称为修改单纯形表。

根据这张表和原始数据进行迭代计算。由$\zeta_k = \max\{\mathbf{wa}_j - c_j \mid x_j\text{非基变量}\}$确定$x_k$为进基变量

再求$\bar{\mathbf{a}}_k = B^{-1}\mathbf{a}_k$，用最小比确定离基变量$x_r$,得到新的基$\hat{B}$,最后构造对应于$\hat{B}$的修改单纯形表。

如果每一次迭代都必须从构造B^{-1},则计算量显然难以令人满意。

定理：对应基B的修改单纯形表的右边添加一列$\begin{pmatrix} \zeta_k \\ \bar{\mathbf{a}}_k \end{pmatrix}$,以$\bar{\mathbf{a}}_{rk}$为转轴元旋转，就得到了对应于基$\hat{B}$的修改单纯形表。

3. 最优性条件
和对偶理论

对偶性

- 对于每一个线性规划P，总存在着另一个线性规划D，两者之间存在着密切的联系，人们可以通过求解对偶规划D来获得原规划P的最优解。

3.1 Karush-Kuhn-Tucker条件

- 定理

设A为$m\times n$阶矩阵，$\mathbf{b}\in E^m,\mathbf{c}\in E^n,\mathbf{x}\in E^n$,则$\mathbf{x}^*$为$LP$问题

$$\begin{aligned}&\min \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\\ &s.t.\quad A\mathbf{x}\geq \mathbf{b}\\ &\qquad\quad \mathbf{x}\geq \mathbf{0}\end{aligned}$$

的最优解的充要条件是存在$\mathbf{w}\in E^m,\mathbf{v}\in E^n$,使得下列$KKT$条件得到满足

$$\begin{aligned}&A\mathbf{x}^*\geq \mathbf{b},\mathbf{x}^*\geq \mathbf{0}\\ &\mathbf{c}-\mathbf{w}^{\mathrm{T}}A-\mathbf{v}=\mathbf{0},\mathbf{w}\geq \mathbf{0},\mathbf{v}\geq \mathbf{0}\\ &\mathbf{w}^{\mathrm{T}}(A\mathbf{x}^*-\mathbf{b})=0,\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}^*=0\end{aligned}$$

若将$\mathbf{v}$消去（利用$\mathbf{c}-\mathbf{w}^{\mathrm{T}}A-\mathbf{v}=\mathbf{0}$），可得$KTT$条件的另一种形式

$$\begin{aligned}&A\mathbf{x}^*\geq \mathbf{b},\quad \mathbf{x}^*\geq \mathbf{0}\\ &\mathbf{w}A\leq \mathbf{c},\quad \mathbf{w}\geq \mathbf{0}\\ &\mathbf{w}(A\mathbf{x}^*-\mathbf{b})=0,\ (\mathbf{w}A-\mathbf{c})\mathbf{x}^*=0\end{aligned}$$

3.1 Karush-Kuhn-Tucker条件

- 证明:
- 充分性

$A\mathbf{x}^* \geq \mathbf{b}, \mathbf{x}^* \geq \mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{x}^*$是可行解

$\mathbf{c} - \mathbf{w}^{\mathrm{T}}A - \mathbf{v} = \mathbf{0}, \mathbf{w} \geq \mathbf{0}, \mathbf{v} \geq \mathbf{0} \Longrightarrow (\mathbf{c} - \mathbf{w}^{\mathrm{T}}A - \mathbf{v})^{\mathrm{T}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) = 0$

$\mathbf{w}^{\mathrm{T}}(A\mathbf{x}^* - \mathbf{b}) = 0, \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}^* = 0$

$\Downarrow$

$$(\mathbf{c} - \mathbf{w}^{\mathrm{T}}A - \mathbf{v})^{\mathrm{T}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) - \mathbf{w}^{\mathrm{T}}(A\mathbf{x} - \mathbf{b}) - \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$$

$\Downarrow$

$A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \geq \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}^*$

$\Downarrow$

$\mathbf{x}^*$是最优解

3.1 Karush-Kuhn-Tucker条件

- 证明：
- 必要性 $\mathbf{x}^*$是最优解 ⇒ $\mathbf{x}^*$是可行解 ⇒ $\boxed{A\mathbf{x}^* \geq \mathbf{b}, \mathbf{x}^* \geq \mathbf{0}}$

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathbf{c}-\mathbf{w}^{\mathrm{T}}A-\mathbf{v}=\mathbf{0}, \mathbf{w}\geq \mathbf{0}, \mathbf{v}\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{w}^{\mathrm{T}}(A\mathbf{x}^*-\mathbf{b})=0, \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}^*=0\end{array}}$$

$$I=\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}, I_1\mathbf{x}^* > 0, I_2\mathbf{x}^* = 0$$

$$A=\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}, \mathbf{b}=\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix} \Rightarrow A_1\mathbf{x}^* = \mathbf{b}_1, A_2\mathbf{x}^* > \mathbf{b}_2$$

$B=\begin{pmatrix} A_1 \\ I_2 \end{pmatrix}, B\mathbf{d}\geq 0$，充分小的正数$\lambda > 0$ $\quad A(\mathbf{x}+\lambda\mathbf{d})\geq \mathbf{b}, \mathbf{x}+\lambda\mathbf{d}\geq 0$

$\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}^* \leq \mathbf{c}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}^*+\lambda\mathbf{d}) \quad \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{d}\geq 0$ 不等式组：$\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{d}<0$，$B\mathbf{d}\geq 0$，无解！

根据*Farkas*引理，存在非负向量$\mathbf{r}\geq 0$，使得$B^{\mathrm{T}}\mathbf{r}=(A_1^{\mathrm{T}}, I_1^{\mathrm{T}})\mathbf{r}=\mathbf{c}$

3.1 Karush-Kuhn-Tucker条件

- 证明：
- 必要性 $\mathbf{x}^*$是最优解 $\Longrightarrow$ $\mathbf{x}^*$是可行解 $\Longrightarrow$ $\boxed{A\mathbf{x}^* \geq \mathbf{b}, \mathbf{x}^* \geq \mathbf{0}}$

根据*Farkas*引理，存在非负向量$\mathbf{r} \geq 0$，使得$B^{\mathrm{T}}\mathbf{r} = (A_1^{\mathrm{T}}, I_1^{\mathrm{T}})\mathbf{r} = \mathbf{c}$

$\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$,分块方式与B对应，容易构造两个非负向量

$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{r}_2 \end{pmatrix}$, 使得：

$A^{\mathrm{T}}\mathbf{w} + \mathbf{v} = B^{\mathrm{T}}\mathbf{r} = \mathbf{c}$ $\Longrightarrow$ $\mathbf{c} - \mathbf{w}^{\mathrm{T}}A - \mathbf{v} = \mathbf{0}, \mathbf{w} \geq \mathbf{0}, \mathbf{v} \geq \mathbf{0}$

容易验证$\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}^* = 0$ $\Longrightarrow$ $\mathbf{w}^{\mathrm{T}}(A\mathbf{x}^* - \mathbf{b}) = 0, \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}^* = 0$

$$A\mathbf{x}^* - \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ A_2\mathbf{x}^* - \mathbf{b}_2 \end{pmatrix}$$

3.1 Kuhn Tucker条件

对于标准形式的LP问题的$K-T$条件

只要将$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$改写成$\begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix}\mathbf{x} \geq \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ -\mathbf{b} \end{pmatrix}$，可推出相应的$K-T$条件

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

$$A^{\mathrm{T}}\mathbf{w}+\mathbf{v}=\mathbf{c}, \mathbf{v} \geq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}=0$$

或等价的

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{w}A \leq \mathbf{c}$$

$$(\mathbf{w}A-\mathbf{c})\mathbf{x}=0.$$

3.1 Kuhn Tucker条件

一个基本可行解$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{b}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$($\bar{\mathbf{b}} > \mathbf{0}$)为最优的充要条件是检验向量$\zeta \le 0$,

和$K-T$是什么关系呢？

由$\mathbf{v}\mathbf{x} = \mathbf{v}_B\mathbf{x}_B + \mathbf{v}_N\mathbf{x}_N = 0$，且 $\mathbf{x}_B > 0$，可知$\mathbf{v}_B = 0$.

条件$\mathbf{c} - \mathbf{w}A - \mathbf{v} = \mathbf{0}$可改写为$(\mathbf{c}_B, \mathbf{c}_N) - \mathbf{w}(B, N) - (\mathbf{v}_B, \mathbf{v}_N) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$，于是有

$$\begin{cases} \mathbf{c}_B - \mathbf{w}B = \mathbf{0} \\ \mathbf{c}_N - \mathbf{w}N - \mathbf{v}_N = \mathbf{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{w} = \mathbf{c}_B B^{-1} \\ \mathbf{v}_N = \mathbf{c}_N - \mathbf{w}N = \mathbf{c}_N - \mathbf{c}_B B^{-1} N \end{cases}$$

这就是说，若给一个基本可行解x,如果取

$\mathbf{v}_B = 0, \mathbf{w} = \mathbf{c}_B B^{-1}, \mathbf{v}_N = \mathbf{c}_N - \mathbf{w}N = \mathbf{c}_N - \mathbf{c}_B B^{-1} N$,

的$K-T$条件除了$\mathbf{v} \ge \mathbf{0}$外，其余条件都已满足。

而根据v的取法，易知$v \ge \mathbf{0} \Leftrightarrow \zeta \le \mathbf{0}$.

3.2 对偶理论

- 对偶问题可被看作是原始问题的“行列转置”

$$\boxed{\min \quad \mathbf{c}^T\mathbf{x} \qquad \text{s.t.} \quad \mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}, \mathbf{x}\ge 0}$$

$$\min \quad c^T x \qquad \text{s.t.} \quad \begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix} x \ge \begin{bmatrix} b \\ -b \end{bmatrix}, x \ge 0$$

- 对偶问题是：

$$\max \quad \begin{bmatrix} b^T & -b^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \qquad \text{s.t.} \quad \begin{bmatrix} A^T & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \le c$$

- 其中y_1和y_2分别表示对应于约束Ax>=b和-Ax<=B的对偶变量组。令y=y_1-y_2

$$\boxed{\max \quad \mathbf{b}^T\mathbf{y} \qquad \text{s.t.} \qquad \mathbf{A}^T\mathbf{y} \le \mathbf{c}}$$

3.2 对偶理论

对偶规划生成规则：

(1) $\min \to \max$；

（2）$\mathbf{c} \to \mathbf{b}$；　（3）$A \to A^T$；

（4）按以下规则添上不等号

原问题		对偶问题	
变	≥ 0	行	$\leq$
量	≤ 0	约	$\geq$
	无限制	束	$=$
行	$\geq$		≥ 0
约	$\leq$	变	≤ 0
束	$=$	量	无限制

LP问题(P)

$$\begin{aligned} &\min \mathbf{cx} \\ &s.t.\quad A\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ &\qquad\quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

对偶问题(D)为

$$\begin{aligned} &\max \mathbf{wb} \\ &s.t.\quad \mathbf{w}A \leq \mathbf{c} \\ &\qquad\quad \mathbf{w} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

3.2 对偶理论

对偶规划生成规则：

(1) $\min \rightarrow \max$；

(2) $\mathbf{c} \rightarrow \mathbf{b}$；　(3) $A \rightarrow A^T$；

(4) 按以下规则添上不等号

原问题		对偶问题	
变	≥ 0	行	$\leq$
量	≤ 0	约	$\geq$
	无限制	束	$=$
行	$\geq$		≥ 0
约	$\leq$	变	≤ 0
束	$=$	量	无限制

标准LP问题

$$\begin{aligned} &\min \mathbf{cx} \\ &s.t. \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ &\qquad\quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

对偶问题为

$$\begin{aligned} &\max \mathbf{wb} \\ &s.t. \quad \mathbf{w}A \leq \mathbf{c} \end{aligned}$$

3.2 对偶理论

对偶规划生成规则：

(1) $\min \rightarrow \max$；

(2) $\mathbf{c} \rightarrow \mathbf{b}$；　(3) $A \rightarrow A^T$；

(4) 按以下规则添上不等号

原问题		对偶问题	
变量	≥ 0	行约束	$\leq$
	≤ 0		$\geq$
	无限制		$=$
行约束	$\geq$	变量	≥ 0
	$\leq$		≤ 0
	$=$		无限制

LP问题

$$\begin{aligned} &\min \mathbf{c}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{c}_2\mathbf{x}_2 \\ &s.t. \quad A_{11}\mathbf{x}_1 + A_{12}\mathbf{x}_2 \geq \mathbf{b}_1 \\ &\qquad A_{21}\mathbf{x}_1 + A_{22}\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2 \\ &\qquad A_{31}\mathbf{x}_1 + A_{32}\mathbf{x}_2 \leq \mathbf{b}_3 \\ &\qquad \mathbf{x}_1 \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

对偶问题为

$$\begin{aligned} &\max \mathbf{w}_1\mathbf{b}_1 + \mathbf{w}_2\mathbf{b}_2 + \mathbf{w}_3\mathbf{b}_3 \\ &s.t. \quad \mathbf{w}_1A_{11} + \mathbf{w}_2A_{21} + \mathbf{w}_3A_{31} \leq \mathbf{c}_1 \\ &\qquad \mathbf{w}_1A_{12} + \mathbf{w}_2A_{22} + \mathbf{w}_3A_{32} = \mathbf{c}_2 \\ &\qquad \mathbf{w}_1 \geq \mathbf{0}, \mathbf{w}_3 \leq \mathbf{0} \end{aligned}$$

对偶定理

- 设**x**和**w**分别为(P)和(D)的可行解，则有**cx≥wb**.
- 设**x***和**w***分别为(P)和(D)的可行解，则**x***和**w***分别为(P)和(D)的最优解的充要条件是**cx*=w*b**.
- 推论：若(P)有最优解**x***，则(D)有最优解**w***，且**cx*=w*b**；若(P)无界，则(D)无解。反之亦然。
- 互补松弛性：设**x***和**w***分别为(P)和(D)的最优解，则有**w***(*A***x***-**b**)=**0**, (**c**-**w***A*)**x***=**0**。

$K-T$条件：

$$A\mathbf{x}^* \geq \mathbf{b}，\ \mathbf{x}^* \geq \mathbf{0} \qquad \text{（原始可行性）}$$

$$\mathbf{w}A \leq \mathbf{c}, \mathbf{w} \geq \mathbf{0} \qquad \text{（对偶可行性）}$$

$$\mathbf{w}(A\mathbf{x}^* - \mathbf{b}) = 0，(\mathbf{w}A - \mathbf{c})\mathbf{x}^* = 0 \qquad \text{（互补松弛性）}$$

对偶定理

- 从K-T条件与单纯形方法中的最优准则的关系中可以看出：在单纯形方法中，除了K-T条件的$\mathbf{v} \geq \mathbf{0}$外，其余都得到满足。即单纯形法就是保持了原始可行性、互补松弛性、$\mathbf{c}-\mathbf{w}A-\mathbf{v}=\mathbf{0}$得到满足的条件下逐步改善基本可行解，使得对偶可行性中的$\mathbf{v}=\mathbf{c}-\mathbf{w}A \geq \mathbf{0}$得到满足。

- 启发：也可以在保证对偶可行性和互补松弛性满足的条件下，改善解使得原始可行性得到满足。

对偶单纯形法

$$(P)\ \min \mathbf{cx} \qquad\qquad (D)\ \max \mathbf{wb}$$
$$s.t. A\mathbf{x} = b \qquad\qquad s.t.\ \ \mathbf{w}^{\mathrm{T}} A \le \mathbf{c}$$
$$\mathbf{x} \ge 0$$

D的基本可行解：设A＝(B, N)，其中B为满秩方阵，则$\mathbf{w}B = \mathbf{c}_B$的解$\overline{\mathbf{w}} = \mathbf{c}_B B^{-1}$为$(D)$的基本解，若$\overline{\mathbf{w}}N \le \mathbf{c}_N$，则称$\overline{\mathbf{w}}$为$(D)$的基本可行解。

P的正则解：若原问题(P)的一个基本解$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} B^{-1}\mathbf{b} \\ 0 \end{pmatrix}$对应的检验向量$\boldsymbol{\zeta} = (\mathbf{0}, \mathbf{c}_B B^{-1} N - \mathbf{c}_N) \le \mathbf{0},$

则称$\mathbf{x}$为问题(P)的正则解。

此时的基B称为正则基。容易验证，D的基本可行解和P的正则解是一一对应的。
同单纯形法一样，求解对偶规划(D)从(D)的一个基本可行解迭代到另一个基本可行解，使得目标函数值增加。等价地，求解原规划(P)从一个正则解开始，迭代到另一个正则解，使目标函数$z = \mathbf{wb}$＝$\mathbf{c}_B B^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{cx}$增加，直到$B^{-1}\mathbf{b} \ge 0$，即正则解满足原始可行性时，也就找到最优解。这种方法称为对偶单纯形法。

对偶单纯形法

$$(P)\min \mathbf{cx} \qquad\qquad (D)\max \mathbf{wb}$$

$$s.t. A\mathbf{x}=b \qquad\qquad s.t.\ \ \mathbf{w}^{\mathrm{T}}A\le \mathbf{c}$$

$$\mathbf{x}\ge 0$$

1。找一个正则基B，建立单纯形表。

2。若$\bar{\mathbf{b}}=B^{-1}\mathbf{b}\ge 0$，停止，已找到原问题最优解；

否则令$\bar{b}_r=\min\{\bar{b}_i \mid i=1,\ldots,m\}$.

3。若$\bar{\mathbf{a}}^r\ge 0$,停止，原问题无解；

否则令$\dfrac{\zeta_k}{\bar{a}_{rk}}=\min\{\dfrac{\zeta_j}{\bar{a}_{rj}} \mid a_{rj}<0\}$

4。以$\bar{a}_{rk}$为旋转轴元旋转，返回2。

3.4 原始一对偶单纯形法

- 同时从对偶问题和第一阶段辅助问题求解
- 从对偶问题的任意可行解开始，同时在迭代过程中保持对偶可行性和互补松弛性以及$x \geq 0$的情况下通过剔除人工变量使$Ax=b$成立

$$(P)\ \min \mathbf{cx}$$
$$s.t.\ \ A\mathbf{x}=b$$
$$\mathbf{x}\geq 0$$

$$(D)\ \max \mathbf{wb}$$
$$s.t.\ \ \mathbf{w}A\leq \mathbf{c}$$

在(P)中引入人工变量后，得到辅助问题

$$\min g=\mathbf{1x}_a$$
$$s.t\ \ A\mathbf{x}+\mathbf{x}_a=\mathbf{b}\quad (\mathbf{b}\geq 0)$$
$$\mathbf{x},\mathbf{x}_a\geq \mathbf{0}$$

若已知(D)的一个可行解$\overline{\mathbf{w}}$，为保持互补松弛性$(\mathbf{x}(\overline{\mathbf{w}}A-\mathbf{c})=\mathbf{0})$,将令

$x_j=0$(当$\overline{\mathbf{w}}\mathbf{a}_j\neq c_j$)，于是辅助问题为

$$(P')\ \min g=\mathbf{1x}_a$$
$$s.t\ \ A\mathbf{x}+\mathbf{x}_a=\mathbf{b}$$
$$x_j=0,\ j\notin Q$$
$$x_j\geq 0,\ j\in Q$$
$$\mathbf{x}_a\geq \mathbf{0}$$

其中$Q=\{j\mid \overline{\mathbf{w}}\mathbf{a}_j=c_j,\ j=1,\ldots,n\}$。问题$(P')$称为对应于$\overline{\mathbf{w}}$的限定问题。

求解问题(P')，得到最优解$\begin{pmatrix}\mathbf{x}^*\\ \mathbf{x}_a^*\end{pmatrix}$，则它是$(P)$的辅助问题的基本可行解。

若$\mathbf{x}_a^*$=$\mathbf{0}$，则$\mathbf{x}^*$为问题(P)的最优解

（因为$\mathbf{x}^*$和$\overline{\mathbf{w}}$分别是(P)和(D)的可行解，且满足互补松弛性）。

若$\mathbf{x}_a^*\neq \mathbf{0}$，找$(D)$的另一个基本可行解$\hat{\mathbf{w}}$，使得$(D)$目标函数值有所增加，同时对应于$\hat{\mathbf{w}}$的限定问题的最优值将较对应于$\overline{\mathbf{w}}$的限定问题的最优值有所减少

（等价于剔除人工变量）。

3.4 原始一对偶单纯形法

考虑(P')的对偶问题(D')

$(D')\ \max \mathbf{vb}$

$s.t.\ \mathbf{va}_j \le 0, j \in Q$

$\mathbf{v} \le \mathbf{1}$

令$\mathbf{v}^*$为其最优解。如对于所有的$j=1,\ldots,n$，都要$\mathbf{v}^*\mathbf{a}_j \le \mathbf{0}$，则说明$\mathbf{v}^*$还是辅助问题的对偶问题的最优解，于是$\begin{pmatrix}\mathbf{x}^* \\ \mathbf{x}_a^*\end{pmatrix}$就是辅助问题的最优解。由于$\mathbf{x}_a^* \ne 0$，故原问题$(P)$无解。

构造$\hat{\mathbf{w}}=\overline{\mathbf{w}}+\theta\mathbf{v}^*$,其中

$$\theta=\min\left\{-\frac{\overline{\mathbf{w}}\mathbf{a}_j-c_j}{\mathbf{v}^*\mathbf{a}_j}\middle|\mathbf{v}^*\mathbf{a}_j>0, j=1,\ldots,n\right\}.$$

可以证明$\hat{\mathbf{w}}$满足要求。同时,$\begin{pmatrix}\mathbf{x}^* \\ \mathbf{x}_a^*\end{pmatrix}$还是对应于$\hat{\mathbf{w}}$的限定问题的一个基本可行解，因此可以使用它来作为初值来求解对应于$\hat{\mathbf{w}}$的限定问题。如此循环。。。

3.4 原始—对偶单纯形法

1。 变求解的规划为

$$\begin{aligned}&\min \mathbf{cx}\\ &s.t.\ \ A\mathbf{x}=b\\ &\qquad \mathbf{x}\ge 0\end{aligned}$$

的形式。找其对偶规划的初始解$\mathbf{w}$，满足$\mathbf{w}A\le \mathbf{c}$。（当$\mathbf{c}\ge 0$时，可取$\mathbf{w}$=0作为初始解）

2。 令$Q=\{j\mid \overline{\mathbf{w}\mathbf{a}}_j=c_j, j=1,\ldots,n\}$。求解$\mathbf{w}$的限定问题

$$\begin{aligned}&\min g=\mathbf{1x}_a\\ &s.t\ \ A\mathbf{x}+\mathbf{x}_a=\mathbf{b}\\ &\qquad x_j=0, j\notin Q\\ &\qquad x_j\ge 0, j\in Q\\ &\qquad \mathbf{x}_a\ge \mathbf{0}\end{aligned}$$

若它的最优值$g=0$，停止，以及找到原问题的最优解；否则，求其对偶问题并令其最优解为$\mathbf{v}$。

3。 若$\mathbf{v}A\le \mathbf{0}$，则停止，原问题无解；否则令

$$\theta=\min\left\{-\frac{\overline{\mathbf{w}\mathbf{a}}_j-c_j}{\mathbf{v}^*\mathbf{a}_j}\middle|\mathbf{v}^*\mathbf{a}_j>0, j=1,\ldots,n\right\}$$，并且构造$\mathbf{w}=\mathbf{w}+\theta\mathbf{v}^*$，返回2。

3.5 对偶初始解

- 对偶单纯形法和原始—对偶单纯形法都需要一个对偶可行解。而且对偶单纯形法还要求是一个基本可行解。

对应任意一个LP问题，总可以使用高斯消去法找到一个基B,并化为典式。

此时若$\boldsymbol{\zeta}_N \le \mathbf{0}$,则说明已经找到对偶问题的一个基本可行解$w = c_B B^{-1}$.

否则，增加一个约束$\mathbf{1x}_N \le M$, M是一个充分大的参数（从而这一约束不影响原问题）

增加约束后，称为扩充问题。（可证明：原问题有可行解 $\Leftrightarrow$ 对于充分大的M,扩充问题有可行解）

	z	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_N$	x_{n+1}	RHS
z	1	0	$\boldsymbol{\zeta}_N$	0	z_0
$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{0}$	I	$\bar{N}$	$\mathbf{0}$	$\bar{\mathbf{b}}$
x_{n+1}	0	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	1	M

设$\zeta_k = \max\{\zeta_i\}$,以$\bar{a}_{m+1,k}$为转轴旋转得到新的单纯形表。因为$\boldsymbol{\zeta} \le 0$，则新单纯形表对应一个正则解。于是可以开始用对偶单纯形法或原始—对偶单纯形法开始求解。

计算结果有两种可能:

1。扩充问题无解 $\Rightarrow$ 原问题无解。

2。扩充问题有最优解$\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}_1 + \bar{\mathbf{x}}_2 M$，最优值为$z_0 = z_1 + z_2 M$。这时原问题一定有可行解$\hat{\mathbf{x}}$,且$z_1 + z_2 M \le \mathbf{c}\hat{\mathbf{x}}$。由于$M$充分大，故一定有$z_2 \le 0$。（否则$\mathbf{c}\hat{\mathbf{x}}$会变的可以任意充分大了）

(i) $z_2 < 0$。当$M \to \infty, z_0 \to -\infty$。问题无界

(ii) z_2=0。$z_0 = z_1$为原问题最优值，$\bar{\mathbf{x}} \ge 0$为原问题的最优解。若$\bar{\mathbf{x}}_2 = 0$, $\bar{\mathbf{x}}$还是一个基本可行解。否则（$\bar{\mathbf{x}}_2 \ne 0$），令$M_o = \min\{M \mid \bar{\mathbf{x}}_1 + \bar{\mathbf{x}}_2 M \ge 0\}$,此时$\bar{\mathbf{x}}_0 = \bar{\mathbf{x}}_1 + \bar{\mathbf{x}}_2 M_0$也是基本可行解。

而$\{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}_1 + \bar{\mathbf{x}}_2 M, M \ge M_0\}$则表示可行区域的一个半直线界面，其上任意一点均是最优解。

SVM与对偶方法

- http://www.cad.zju.edu.cn/home/zhx/csmath/lib/exe/fetch.php?media=svm_cjlin_dm.pdf

问题

- 单纯形法是不是一个好方法？
  - 性能
  - 对数据的适应性
  - 可实现性

算法复杂性

- 最坏性能
  - 在最坏情况下，算法表现出来的性能。
- 平均性能
  - 在各种可能情况，算法表现出来的期望性能。

- 问题(problem)：
  - 需要解决的数学问题，通常包含一组参数和未知的自由变量，并加以描述：
    - 对所有参数的描述
    - 对解所需要满足的特性的描述
- 实例(instance)：
  - 具体给定参数和描述的问题实例。

- 算法：
  - 是一组含义明确的简单指令，遵循这些指令可以解决一个问题。
  - 问题的可解性，指存在一个算法，在有限时间和存储空间内，可求解该问题的任意实例。“停机问题”是算法不可解的。

算法复杂性

- 衡量标准：一个算法在运行时所需的初等运算次数。

- 输入规模：实例的编码长度

- 算法复杂性函数：$f: N \rightarrow R^+$
  - 多项式时间算法，增长速度是规模的多项式函数
    - $f(k) = O(k^3)$

  - 指数时间算法，增长速度是规模的指数函数
    - $f(k) = O(2^k)$

单纯形方法的复杂性

- 不是多项式时间的，最坏情况是指数时间的！

$$
\begin{aligned}
\max \quad & c=\sum_{i=1}^{n} w_i \\
s.t. \quad & w_i+2\sum_{j<i} w_i \le \theta^{i\text{-}1} \\
& w_i \ge 0, i=1,\ldots,n
\end{aligned}
$$

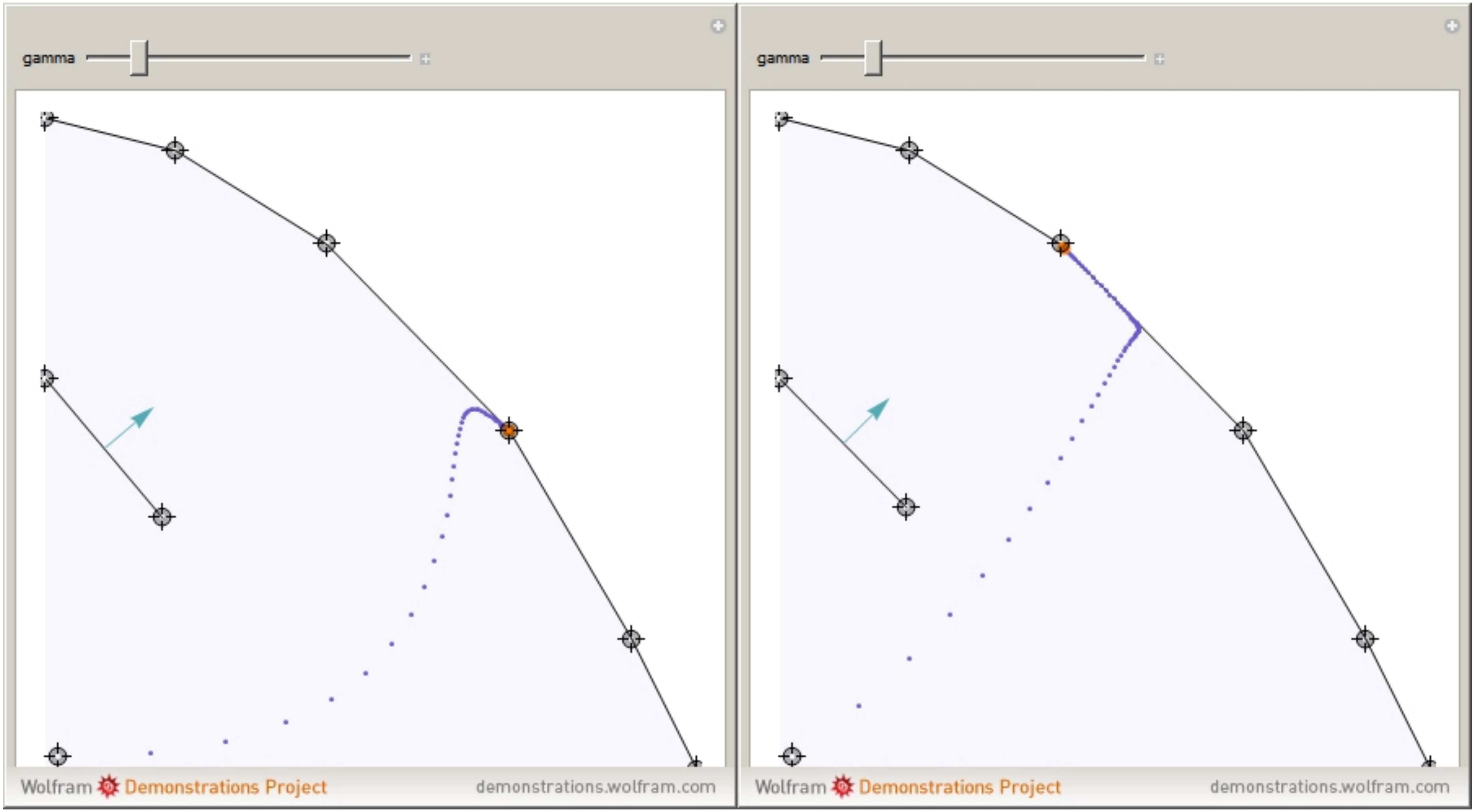
- 根据最小比值迭代需要（MRT）规则，需要 2^n-1次迭代

Karmarkar投影尺度算法

- 两个基本事实：
  - 如果一个内点位于多胞形的中心，沿着目标函数的最速下降方向是比较好的方向
  - 在不改变基本特性的条件下，存在一个适当的变换，可将可行域中的给定内点置于变换后的中心。

- 基本思想：内点→投影尺度变换→中心→移动逆变换→新的内点→投影尺度变换→中心。。。

Karmarkar投影尺度算法



Karmarkar投影尺度算法

1．出发点：与单纯形法不同，不沿边走，而从内部寻优。1995年Frisch曾构造函数为：

$$\min z = \frac{1}{r_k} C^T X - \sum_{j=1}^{n} \log\ x_j$$

s.t　　$AX=b$

当$x_j \to 0$，$z \to \infty$，而永不靠边走。但存在问题，收效慢（中间点寻优方法属梯度法）

Karmarkar投影尺度算法

2．Karmarkar解决2个大问题（1987 AT&T，but 1967 Dikin）

①定义目标势函数，按几何级数收敛，（属P算法）
变换原规划的最优解为0，使之第k次迭代值为：

$$C^T X^k \le (\frac{1}{f})^k C^T X^0$$

构造势函数为：

$$f(x) = f(x，c) = n \log C^T X - \sum_{j=1}^{n} \log x_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \log(\frac{C^T X}{x_j})$$

Karmarkar投影尺度算法

使变换中：$f(x^k) \le f(x^0) - k\delta$

②从X^k点找下一点X^{k+1}点的关键是投影变换。记：

$$\Omega = \{x | Ax = b\} \qquad P_+ = \{x | x \ge 0\} \qquad P = \{x | \Omega \cap P_+\}$$

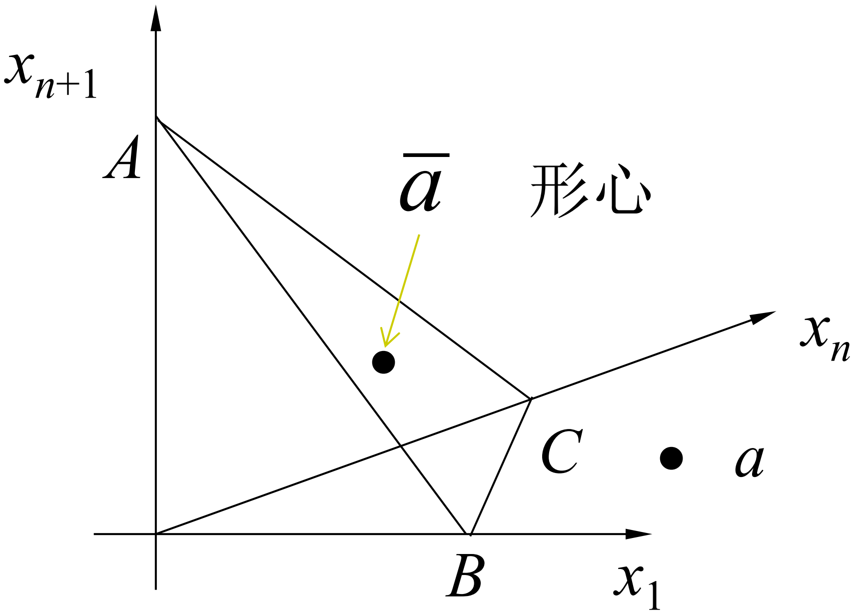
设$a=(a_1,a_2,\ldots\ldots a_n)^T$ 是P中任一点（Karmarka算法中是取某个可行点），设法把P_+投影到n+1维空间的n维单纯形去，且使a落到形心。

Karmarkar投影尺度算法

对于任意点X，投到n维单纯形后的坐标为：

$$\bar{x}_i = \frac{\dfrac{x_i}{a_i}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{x_j}{a_j}\right)+1}$$

$$\bar{x}_{n+1} = \frac{1}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{x_j}{a_j}\right)+1}$$



（i=1，2，…，n）

Karmarkar投影尺度算法

Consider a Linear Programming problem in matrix form:

maximize $c^T x$

subject to $Ax \leq b$.

```
Algorithm Affine-Scaling
  Input:  A, b, c, x^0, stopping criterion, γ.
```

$k \leftarrow 0$

do while *stopping criterion* **not satisfied**

$$v^k \leftarrow b - Ax^k$$
$$D_v \leftarrow \operatorname{diag}(v_1^k, \ldots, v_m^k)$$
$$h_x \leftarrow (A^T D_v^{-2} A)^{-1} c$$
$$h_v \leftarrow -Ah_x$$

if $h_v \geq 0$ **then**

return unbounded

end if

$$\alpha \leftarrow \gamma \cdot \min\{-v_i^k/(h_v)_i \mid (h_v)_i < 0,\ i = 1, \ldots, m\}$$
$$x^{k+1} \leftarrow x^k + \alpha h_x$$
$$k \leftarrow k + 1$$

end do

https://ocw.mit.edu/courses/sloan-school-of-management/15-093j-optimization-methods-fall-2009/lecture-notes/MIT15_093J_F09_lec21.pdf

The End

新浪微博：@浙大张宏鑫

微信公众号：