最优化方法 (IV)

张宏鑫

2014-04-17

浙江大学计算机学院

1. 约束非线性最优化

约束优化最优性条件

约束最优化问题通常写为

$$\min f(\mathbf{x})$$

$$\text{s.t. } c_i(\mathbf{x})=0,\ i\in E=\{1,\ldots,m_e\},$$

$$c_i(\mathbf{x})\geq 0,\ i\in I=\{m_e+1,\ldots,m\}$$

在$\mathbf{x}^*$处的非积极约束

设$\mathbf{x}^*$为一个局部极小点，若不等式约束i_0有，$c_{i0}(\mathbf{x}^*)>0$，则可将第i_0个约束去掉，且$\mathbf{x}^*$仍然是去掉第i_0个约束条件的问题的局部极小点。称约束c_{i0}在$\mathbf{x}^*$处是非积极的。

定义：$I(\boldsymbol{x}) = \{\, i \mid c_i(\boldsymbol{x}) \leq 0,\ \ i \in I\}$; $A(\boldsymbol{x}) = E \cup I(\boldsymbol{x})$ 为$\boldsymbol{x}$点处的积极集合。

一阶最优性条件

Kuhn - Tucker 必要条件：

若 x^* 是问题 P 的一个局部极小点，如果 $\nabla c_i(x^*)(i \in E \cup I(x^*))$ 线性无关，

则必存在 $\lambda_i^*(i = 1,\dots, m)$，使得

$$\nabla f(x^*) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla c_i(x^*), \qquad (*)$$

$$\lambda_i^* \geq 0，\quad \lambda_i^* c_i(x^*) = 0, i \in I. \qquad (**)$$

满足上述两式的点称为 K - T 点。与该定理联系密切的是 Lagrange 函数：

$$L(x, \lambda) = f(x) - \lambda^T c(x).$$

则 (*) 条件等价于 $\nabla_x L = 0$。λ 称为 Lagrange 乘子。

二阶必要条件

定义：设 x^*是$K-T$点， λ^*称为相应的 $Lagrange$ 乘子，若存在序列 $\{d_k\}$和$\{\delta_k>0\}$使得

$$x^* + \delta_k d_k \in X$$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* c_i\left(x^* + \delta_k d_k\right) = 0, i \in I.$$

且有 $d_k \to d$， $\delta_k \to 0$，则称 d为x^*处的序列零约束方向。 在x^*处的所有序列零约束方向的集合记为 $S(x^*, \lambda^*)$.

二阶必要性条件：

设x^*为局部极小点， λ^*称为相应的 $Lagrange$ 乘子，则必有

$d^T \nabla_{xx}^2 L\left(x^*, \lambda^*\right) d \ge 0, \forall d \in S\left(x^*, \lambda^*\right)$. 其中 $L(x, \lambda)$为 $Lagrange$ 函数。

稍加强可得充分性条件 ：

设x^*为$K-T$点， λ^*称为相应的 $Lagrange$ 乘子，若

$d^T \nabla_{xx}^2 L\left(x^*, \lambda^*\right) d > 0, \forall 0 \ne d \in S\left(x^*, \lambda^*\right)$, 则$x^*$为局部严格极小点。

可行方向法

- 可行方向法即要去每次迭代产生的点$\boldsymbol{x}_k$都是约束优化问题的可行点。
- 关键在于每一步寻找可行下降方向：

$$\mathbf{d}^T \nabla f\left(\mathbf{x}_k\right) < 0, \mathbf{d} \in FD(\mathbf{x}_k, X).$$

可行方向：设$\bar{x} \in X, 0 \neq d \in R^n$，如存在$\delta > 0$使得$\bar{x} + td \in X$，则称$d$为$\bar{x}$处的可行方向。$X$在$\bar{x}$处的所有可行方向集合记为$FD(\bar{x}, X)$。

变量消去法

考虑等式约束问题

$$\min f(\mathbf{x}),$$

$$s.t.\ \ c(\mathbf{x}) = 0$$

设有变量分解 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix}$,其中 $x_B \in R^m$， $x_N \in R^{n-m}$.

则 $c(x) = 0$ 可改写为

$$c\left(x_B, x_N\right) = 0. \qquad (1)$$

假定可以从(1)解出 $x_B = \phi\left(x_N\right)$，则原问题等价于

$$\min_{x_N \in R^{n-m}} f\left(x_B, x_N\right) = f\left(\phi\left(x_N\right), x_N\right) = \tilde{f}\left(x_N\right).$$

称 $\tilde{g}\left(x_N\right) = \nabla_{x_N} \tilde{f}\left(x_N\right)$ 为既约梯度。

变量消去法

不难验证

$$\tilde{g}(x_N)=\frac{\partial f(x_B,x_N)}{\partial x_N}+\frac{\partial x_B^T}{\partial x_N}\frac{\partial f(x_B,x_N)}{\partial x_B},$$

从(1)可得

$$\frac{\partial x_B^T}{\partial x_N}\frac{\partial c(x_B,x_N)^T}{\partial x_B}+\frac{\partial c(x_B,x_N)^T}{\partial x_N}=0.$$

假设 $\frac{\partial c(x_B,x_N)^T}{\partial x_B}$ 非奇异，可得到

$$\tilde{g}(x_N)=\frac{\partial f(x_B,x_N)}{\partial x_N}-\frac{\partial c(x_B,x_N)^T}{\partial x_N}\left(\frac{\partial c(x_B,x_N)^T}{\partial x_B}\right)^{-1}\frac{\partial f(x_B,x_N)}{\partial x_B}$$

变量消去法

令 $\lambda = \left(\dfrac{\partial c(x_B, x_N)^T}{\partial x_B} \right)^{-1} \dfrac{\partial f(x_B, x_N)}{\partial x_B}$，则发现可以将

既约梯度写成Lagrange函数在既约空间上的梯度

$$\tilde{g}(x_N) = \frac{\partial}{\partial x_N}\left[f(x) - \lambda^T c(x) \right]$$

或者说，有

$$\nabla_x L(x, \lambda) = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{g}(x_N) \end{bmatrix}$$

变量消去法

故既约梯度可看作*Lagrange*函数之梯度的非零部分。

利用既约梯度，可以构造无约束优化问题的线搜索方向。

例如可取最速下降方向

$$\tilde{d}_k = -\tilde{g}\left((x_N)_k\right),$$

或拟牛顿方向

$$\tilde{d}_k = -H_k \tilde{g}\left((x_N)_k\right)。$$

在无约束问题上作线性搜索，等价于对原目标函数

$f(x)$在曲线

$$c\left(x_B, (x_N)_k + \alpha \tilde{d}_k\right) = 0 \qquad （2）$$

上作曲线搜索。因为$\phi(x)$的解析表达式并不知道，故

作一维搜索时，每个试探步长$\alpha > 0$都要用(2)来求解x_B.

变量消去法

1。 给出可行点 $x_1, \varepsilon \geq 0, k = 1$

2。 计算 $\dfrac{\partial c(x_k)^T}{\partial x} = \begin{bmatrix} A_B \\ A_N \end{bmatrix}$， 其中划分使得 A_B 非奇异；

计算 $\lambda = \left(\dfrac{\partial c(x_B, x_N)^T}{\partial x_B} \right)^{-1} \dfrac{\partial f(x_B, x_N)}{\partial x_B}$ 及 $\tilde{g}\left((x_N)_k\right) = \dfrac{\partial}{\partial x_N}\left[f(x) - \lambda^T c(x) \right]$。

3。 如果 $\left\| \tilde{g}_k \right\| \leq \varepsilon$， 则停止； 否则利用某种方式产生下降方向 $\tilde{d}_k$，即使得

$\tilde{d}_k \tilde{g}_k < 0$;

4。 $\min\limits_{\alpha \geq 0} f\left(\phi\left((x_N)_k + \alpha \tilde{d}_k\right), (x_N)_k + \alpha \tilde{d}_k\right)$ 进行线性搜索给出 $\alpha_k > 0$，令

$x_{k+1} = \left(\phi\left((x_N)_k + \alpha_k \tilde{d}_k\right), (x_N)_k + \alpha_k \tilde{d}_k\right), k = k + 1,$

转 2 步 。

广义消去法

考虑更一般的形式。任意非奇异矩阵$S \in R^{n\times n}$，以及变量替换

$x = Sw$

对w进行变量分离$w = \begin{bmatrix} w_B \\ w_N \end{bmatrix}$。利用约束条件$c(x) = 0$进行变量消去

得到$w_B = \phi(w_N)$。于是原问题等价于

$$\min_{w_N \in R^{n-m}} f(S_B w_B + S_N w_N) = \tilde{f}(w_N)$$

可直接计算得到$\nabla_{w_n} \tilde{f}(w_N) = \tilde{g}(((x_N)_k)) = (S_k)_N \left[\nabla f(x) - \nabla c(x)^T \lambda\right]$，

其中λ满足$(S_k)_B \left[\nabla f(x) - \nabla c(x)^T \lambda\right] = 0$。

广义消去法

1。给出可行点 $x_1, \varepsilon \geq 0, k=1$

2。以某种方式构造一非奇异矩阵 S_k，且有划分 $S_k = \left[(S_k)_B, (S_k)_N \right]$，使得 $(S_k)_B^T \dfrac{\partial c(x_k)^T}{\partial x}$ 非奇异；

根据 $(S_k)_B \left[\nabla f(x) - \nabla c(x)^T \lambda \right] = 0$ 计算 λ，以及计算 $\tilde{g}\left((x_N)_k\right) = (S_k)_N \left[\nabla f(x) - \nabla c(x)^T \lambda \right]$。

3。如果 $\left\| \tilde{g}_k \right\| \leq \varepsilon$，则停止；否则利用某种方式产生下降方向 $\tilde{d}_k$，即使得

$$\tilde{d}_k \tilde{g}_k < 0;$$

4。$\min\limits_{\alpha \geq 0} f\left((S_k)_B \phi\left((w_k)_N + \alpha \tilde{d}_k \right), (S_k)_B \left((x_k)_N + \alpha \tilde{d}_k \right) \right)$ 进行线性搜索给出 $\alpha_k > 0$，令

$$x_{k+1} = \left((S_k)_B \phi\left((w_k)_N + \alpha_k \tilde{d}_k \right), (S_k)_B \left((x_k)_N + \alpha_k \tilde{d}_k \right) \right), k = k+1,$$

转2步。

若S_k=I，广义消去法就是变量消去法。

投影梯度法

广义消去法每次迭代的 变量增量 $x_{k+1}-x_k$由两部分组成，

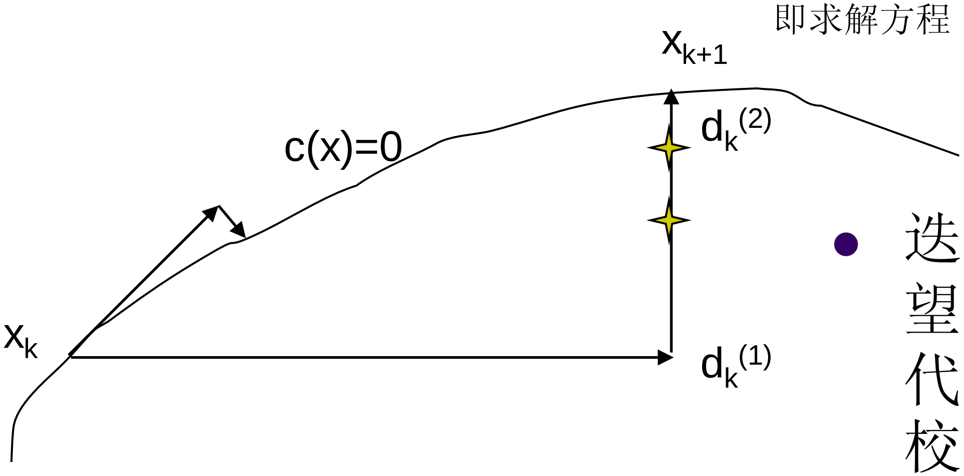
$x_{k+1}=x_k+d_k^{(1)}+d_k^{(2)}$,其中

$$d_k^{(1)}=\alpha_k(S_k)_N\tilde{d}_k,\ d_k^{(2)}=(S_k)_B\left[\varphi\left((w_k)_N+\alpha_k\tilde{d}_k\right)-(w_k)_B\right]$$

迭代过程是先得到 $d_k^{(1)}$，再在 $d_k^{(2)}$方向上迭代得到正确的 步长。

在 $d_k^{(2)}$方向上迭代的过程就是 利用 $c(x)=0$求解 w_B的过程。

即求解方程 $c\left((S_k)_B w_B+(S_k)_N\left[(w_k)_N+\alpha\tilde{d}_k\right]\right)=0$



- 迭代方式存在不合理之处。本来希望迭代点都在可行域上，但具体迭代过程却是先远离可行域，然后再校正回可行域中。
- 希望离开程度尽可能小？沿线性化方向。迭代过程可以更快的收敛。

线性化可行方向：

设 $x^* \in$ 可行域 $X, d \in R^n$

$d^T \nabla c_i(x^*) = 0, i \in E; d^T \nabla c_i(x^*) \geq 0, i \in I(x^*)$

则 d 为 X 的 x^* 处的线性化可行方向。

为使 $d_k^{(1)}$ 沿线性化可行方向，应选取 S_k 使得 $(S_k)_N^T \nabla c(x_k)^T = 0.$

设 $A_k = \nabla c(x_k)^T$，则由 $(S_k)_N$ 的列向量所张成的子空间就是 A_k^T 的零空间。

而另一方面，$P = I - A_k(A_k^T A_k)^{-1} A_k^T$ 为到该零空间的投影算子。

当在广义消去法中用最速下降法时，可得 $d_k^{(1)} = -\alpha_k (S_k)_N (S_k)_N^T \nabla f(x_k)$，

因为 $d_k^{(1)}$ 为线性可行方向，故 $d_k^{(1)}$ 在 A_k^T 的零空间中，进而可知 $(S_k)_N (S_k)_N^T$ 为投影算子 P。

在计算中，可利用 A_k 的 QR 分解，

$$A_k = QR = [Y_k \quad Z_k]\begin{bmatrix} R_k \\ 0 \end{bmatrix}, A_k \in R^{n\times m}, Q\text{为正交阵，} \quad Y_k \in R^{n\times m}, \quad Z_k \in R^{n\times(n-m)},$$

$R_k \in R^{m\times m}$ 可逆上三角矩阵。可取 $(S_k)_N = Z_k, (S_k)_B = I$。

若将搜索方向换成 $d_k = -Z_k z_k, z_k \in R^{n-m}$，且满足 $z_k^T \tilde{g}_k < 0$，则算法是一个一般形式的线性化可行方向法，简称可行方向法。

罚函数法

- 利用目标函数和约束函数构造具有“罚性质”的函数

$$P(\mathbf{x})=P(f(\mathbf{x}), c(\mathbf{x}))$$

所谓的罚性质，即要求对于可行点$P(\mathbf{x})=f(\mathbf{x})$, 当约束条件破坏很大时，$P(\mathbf{x})>>f(\mathbf{x})$

定义约束违反度函数：

$$C^{(-)}(\mathbf{x})=(c_1^{(-)}(\mathbf{x}), \ldots, c_m^{(-)}(\mathbf{x})),$$

其中：

$$c_i^{(-)}(\mathbf{x})=c_i(\mathbf{x}),\ i=1,\ldots,m_e;$$

$$c_i^{(-)}(\mathbf{x})=\min\{c_i(\mathbf{x}), 0\},\ i=m_e+1,\ldots,m$$

罚函数法

罚函数一般可表示为目标函数与一项与 $c(x)$有关的“罚项”之和，即

$$P(x) = f(x) + h(c^{(-)}(x))$$

罚项是定义在 R^m上的函数，满足 $h(0) = 0, \lim_{\|c\| \to \infty} h(c) = +\infty$

最早的罚函数是 *Courant* 罚函数，定义如下

$$P(x) = f(x) + \sigma \left\| c^{(-)}(x) \right\|_2^2, \sigma > 0$$是一正常数，罚因子。

事实上，更一般的可定义为

$$P(x) = f(x) + \sigma \left\| c^{(-)}(x) \right\|^{\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

罚函数法

一般定义为

$$P(x)=f(x)+\sigma\left\|c^{(-)}(x)\right\|^{\alpha},\quad \alpha>0.$$

若罚函数在可行域边界上取值为无穷，则称为内点罚函数。

内点罚函数仅适合不等式约束问题。

常见有倒数罚函数和对数罚函数：

$$P(x)=f(x)+\sigma^{-1}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{c_i(x)},\quad P(x)=f(x)+\sigma^{-1}\sum_{i=1}^{m}\log c_i(x)$$

内点罚函数在可行域的边界上形成一堵无穷高的“障碍墙”，

所以也称为障碍罚函数。

罚函数法的基本点是：

每次迭代（求解一个无约束优化问题）增加罚函数因子，直到使 $\left\|c^{(-)}(x)\right\|$ 缩小到给定误差。

罚函数法

设 x^* 为原问题的 $K-T$ 点，而 x^* 一般不是 $Courant$ 函数的稳定点。为了克服这一缺点，引入参数 $\theta=(\theta_1,\ldots,\theta_m)$, 其中 $\theta_i \geq 0(i=m_e+1,\ldots,m)$。则

$$P(x)=f(x)+\sum_{i=1}^{m_e}\left[-\lambda_i c_i(x)+\frac{1}{2}\sigma_i(c_i(x))^2\right]+$$

$$\sum_{i=m_e+1}^{m}\begin{cases}-\lambda_i c_i(x)+\dfrac{1}{2}\sigma_i(c_i(x))^2, & \text{如 } c_i(x)<\lambda_i/\sigma_i \\ -\dfrac{1}{2}\lambda_i^2/\sigma_i, & \text{否则}\end{cases}$$

其中 $\lambda_i=\sigma_i\theta_i$

2. 二次规化

非线性最优化

- 最优化的问题的一般形式为

$$\text{Min } f(\mathbf{x}) \quad \text{s.t. } \mathbf{x}\in X$$

$f(\mathbf{x})$为目标函数，$X\subset E^n$为可行域。
如$X= E^n$，则以上最优化问题为无约束最优化问题。

约束最优化问题通常写为

$$\begin{aligned} &\text{Min } f(\mathbf{x}) \\ &\text{s.t. } c_i(\mathbf{x})=0,\ i\in E, \\ &\qquad c_i(\mathbf{x})\geq 0,\ i\in I, \end{aligned}$$

其中E, I分别为等式约束的指标集和不等式约束的指标集，$c_i(\mathbf{x})$是约束函数。

非线性优化中的概念

- 可行点，可行域
- 极小，全局极小（总体极小点），全局严格极小，局部极小，局部严格极小
- 积极与非积极，积极约束，非积极约束
- 可行方向集，线性可行方向集，序列可行方向集

- Farkas引理与K-T条件

- 以上参见《最优化理论与方法》第八章

无约束二次最优化

$$\min f(\mathbf{x}) = \tfrac{1}{2}\, \mathbf{x}^{\mathrm{T}} H \mathbf{x} + \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \mathbf{x},\ \mathbf{x} \in R^{n}$$

H是对称阵

基本解法：求导然后找局部极值。

二次规划的一般形式

$$\min\ f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\,\mathbf{x}^{\mathrm{T}}H\mathbf{x}+\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x},\ \mathbf{x}\in R^{n}$$

$$\text{s.t. } A\mathbf{x}\le\mathbf{b} \qquad (1)$$

- 当H为对称矩阵时，被称为**二次规划**(Quadratic Programming，记作QP)。

- 特别，当H**正定**时，目标函数为凸函数，线性约束下可行域又是凸集。上式被称为**凸二次规划**。

二次规划的一般形式

- $\min\ f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\, \mathbf{x}^{\mathrm{T}} H \mathbf{x} + \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \mathbf{x},\ \mathbf{x} \in R^{n}$

$$\text{s.t. } \boldsymbol{a}_i^{T} \boldsymbol{x} \geq b_i, i \in I, \qquad (1)$$

$$\boldsymbol{a}_i^{T} \boldsymbol{x} = b_i, i \in E.$$

- 当H为对称矩阵时，被称为二次规划(Quadratic Programming，记作QP)。

- 特别，当H**正定**时，目标函数为凸函数，线性约束下可行域又是凸集。上式被称为**凸二次规划**。

二次规划的性质

- QP是一种最简单的非线性规划。QP有如下良好的性质，当H是半正定时：
  - K-T条件不仅是最优解的必要条件，而且是充分条件；
  - 局部最优解就是全局最优解。

等式约束下的二次规划

$$\min\ f(\mathbf{x}) = \tfrac{1}{2}\, \mathbf{x}^{\mathrm{T}} H \mathbf{x} + \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \mathbf{x},\ \mathbf{x} \in R^{n}$$

$$\text{s.t. } A\mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad (2)$$

求解方法：Lagrange乘子法，求解以下无约束二次最优化问题。

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^{\mathrm{T}} H \mathbf{x} + \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} (A\mathbf{x} - \mathbf{b})$$

令$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$对$\mathbf{x}$和$\boldsymbol{\lambda}$的导数为零，得线性方程组

$$H\mathbf{x} + \mathbf{c}^{\mathrm{T}} + A^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\lambda} = 0$$

$$A\mathbf{x} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

可解得$\mathbf{x}$，即为上式的解。

凸二次规划的有效集方法

- 直观解释：将不起作用约束去掉，将起作用约束作为等式约束，通过解一系列等式约束的二次规划来实现不等式约束的优化。

- 基本原理：若$\mathbf{x}$为问题（1）的最优解，则它也是问题

$$\begin{aligned} &\min \frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathrm{T}} H \mathbf{x} + \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \mathbf{x} \\ &\text{s.t. } \mathbf{a}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{x} = b_i, i \in I \end{aligned} \tag{3}$$

- 的最优解，其中$\mathbf{a}_i$是A的第i行，I为起作用约束指标集（有效集）。
- 反之，若$\mathbf{x}$为（1）的可行解，又是（3）的K-T点，且相应的乘子$\lambda_i \geq 0$，则$\mathbf{x}$为（1）的最优解。

凸二次规划的有效集方法

- 算法步骤（迭代法）：
  - 设当前迭代点为$\mathbf{x}_k$，它也是（1）的可行解。该点的有效集记作 I_k，为寻求$\mathbf{x}_k$点的迭代方向$\mathbf{d}$，用乘子法求解

$$\min \frac{1}{2}(\mathbf{x}_k + \mathbf{d})^{\mathrm{T}} H (\mathbf{x}_k + \mathbf{d}) + \mathbf{c}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}_k + \mathbf{d})$$

$$\text{s.t. } \mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{d} = 0, i \in I_k$$

  - 若所得最优值$\mathbf{d}_k$=0，则$\mathbf{x}_k$是（3）的最优解。
    - 为判断它是否（1）的最优解，考察对应于有效约束的乘子$\lambda_i \geq 0$是否成立。若成立，则$\mathbf{x}_k$是K-T点，由二次规划性质$\mathbf{x}_k$是（1）的最优解。

凸二次规划的有效集方法

- 算法步骤（迭代法）：

$$\min \frac{1}{2}(\mathbf{x}_k+\mathbf{d})^{\mathrm{T}} H(\mathbf{x}_k+\mathbf{d})+\mathbf{c}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}_k+\mathbf{d})$$

$$\text{s.t. } \mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{d}=0, i\in I_k$$

  - 若最优值$\mathbf{d}_k \neq 0$，则取$\mathbf{x}_{k+1}=\mathbf{x}_k+\alpha\mathbf{d}_k$，在$\mathbf{x}_{k+1}$为可行点的条件下确定$\mathbf{d}_k$方向的步长$\alpha_k$
    - 如果存在p不在I_k中，使得$\mathbf{a}_p\mathbf{x}_{k+1}=\mathrm{b}_p$，则将$p$加入有效集

  - 如果存在I_k中的指标q，使得$\lambda_i<0$, 则$\mathbf{x}^{(k)}$不是最优解，从有效集中去掉q

可行步长的选取：阻塞约束

$$\alpha_k = \min\{\ 1, \min_{i \notin I_k, \mathbf{a}_i^T \mathbf{d}_k < 0} \frac{b_i - \mathbf{a}_i^T \mathbf{x}_k}{\mathbf{a}_i^T \mathbf{d}_k}\}$$

- $a_k = 1$时，对应约束集不影响，保持不变
- $a_k < 1$时，对应约束称为阻塞约束，此时沿着$\mathbf{d}_k$运动，会被不在指标集中的约束给阻塞了，约束集因此改变。

凸二次规划实例

- SVM …

- libSVM代码
  - http://www.csie.ntu.edu.tw/~cjlin/libsvm/
  - 有效集方法

更多凸二次规划

- 线性互补问题(LCP)，Lemke算法

- 可行方向法：
  - Zoutendijk可行方向法
  - Rosen梯度投影法
  - Wolfe既约梯度法
- 罚函数法
- 逐次二次规划法
- 信赖域法

Homework 05

- 实现SVM：
  - Kernel：线性核，指数核
  - 使用python
- 二次规划方法：
  - 有效集方法
  - 奖励 => 其他更高效的优化方法
- 5次编程作业，请统一提供一个实验报告
  - 格式与课程论文的要求相似

The End

- 数学学习是一种修行

- 大音希声，大象无形
  - 节选自《道德经》

无所得，即是得
以是得，无所得

-- 桂语山房的名片