Partial Differential Equation

Hongxin Zhang

2011-04-28

State Key Lab of CAD&CG
Zhejiang University

Main content

- Introduction of PDE
- Numerical methods of PDE
- Poisson equation and image processing
- PDE and computer animation
- Level set and image processing

Reference

- 《微分方程数值解法》 中科院
- 《偏微分方程数值解法》 清华大学出版社

- 《Introduction to partial differential equations》 Gerald B. Folland, Princeton University Press.
- 《MIT course on PDE》
- 《Partial Differential Equation I》 Michael E. Taylor

Why PDE?

- Computer graphics
  - 场景几何建模：网格去噪，微分域方法
  - 场景精细绘制：辐射度方法，全局光照明模型
  - 物理动态模拟：织物模拟，流体模拟
- Image and video processing
  - Image segmentation：level-set
  - Object tracking：optic flow
- Artificial intelligence and recognition
  - Time series analysis：randomized PDE
- High performance computing
  - …

PDE: an introduction

Outline

- History of Differential Equation
- Fundamental concepts
- 3 Basic PDE
  - Elliptic Equation (椭圆方程)
  - Parabolic equation (抛物线方程)
  - Hyperbolic equation (双曲线方程)
- Solutions

History – Before 1600

- 17世纪以前，中国在科技上占有绝对的领先地位。中国古代的科技思想主要是《易经》所宣扬的以物相数的思想。

- 随着牛顿发明了**微积分**，西方的生产科技力量迅速增长。
  - 微分方程几乎是和微积分同时产生的，这使得人们对于自然界有了更加本质的认识。
  - 微分方程或微积分是人们认识自然界的有效工具，但不是唯一的工具。

History – 17th century

- 17世纪，随着 Newton, Lebiniz 等发明了微积分，数学家们开始用微分变化的思想来解释各种物理现象。
- 不久，这些微分符号出现在一些方程里，最原始的微分方程就这样产生了。
- 但是人们发现这些微分方程并不好求解，一般只有在它们的积分变量可分时才可解。

牛顿

History – 18th century

- 18世纪早期，随着人们将微分方程应用到星体运动等物理现象的研究，对微分方程有了进一步的研究。
- Jacob Bernoulli 仔细研究了用微分方程解决星体运动的问题。
- Taylor 用级数的方法来求解微分方程，并提出了有限差分的方法。
- 这段时期人们虽然对微分方程的研究有了很大进步，但是还没有形成一个一般的理论。

History – 18th century

- 早期人们研究微分方程的主要障碍就是如何求解方程，有些方程看似简单，但实际上极为复杂。
- Euler 根据他对函数的结构和性质的了解，发现了函数是理解和解决微分方程的关键。他发明了一个一般的解决不同类方程的步骤。同时他还建立了一些微分方程模型来解决一些应用的问题。

欧拉

History – 18th century

- 在Euler之后许多数学家扩展或改进了他的思想。
  - Lagrange 可能是第一位有足够的理论和工具来分析微分方程的数学家。1788年他提出了动态系统的一般运动方程，即 Lagrange 方程
  - Laplace 的对太阳系稳定性的研究导致了微分方程的更大的进展，包括更好的数值技术和对积分更深入的理解。1799年他提出了Laplacian 方程。
  - Fourier 在求解热扩散方程上做出了很大的贡献，Fourier级数分析的方法是学习震动现象的重要工具。

History – 19th century

- 19世纪初期，随着Gauss和Cauchy对复变函数的研究的贡献，人们对微分方程的认识也有了很大的进展。
- Gauss 建立了势理论，并发现复变量是理解许多应用中的微分方程的关键。
- Cauchy 将微分方程应用到对流体表面波传导的建模中。他是第一个开始对微积分和微分方程进行严格分析的人，也是第一个对复数建立系统理论并用 Fourier变换的方法求解微分方程的人。

高斯

History – 19th century

- Poisson 将他对微分方程的理解应用到弹性和震动理论的研究。他的大部分工作都是分析和求解微分方程。

- George Green 同样将已有的微分方程应用到电磁场理论中。在1828年他发表了《*An Essay on the Application of Mathematical Analysis to Electricity and Magnetism*》。他的理论是像Thomson, Stokes, Rayleigh, Maxwell等人工作的基石。

History – 19th century

- 在19世纪中叶，为了解决微分方程组问题，一些新的理论产生出来。
- Jacobi 发展了行列式和变换的理论来解决微分方程问题。
- Cayley 在行列式理论的基础上提出了矩阵运算理论。他是矩阵论的奠基者。
- Josiah Gibbs 对热动力系统，电磁场理论和机械理论都有贡献。因为他在微分方程系统方面的工作，他被誉为‘向量分析之父’。

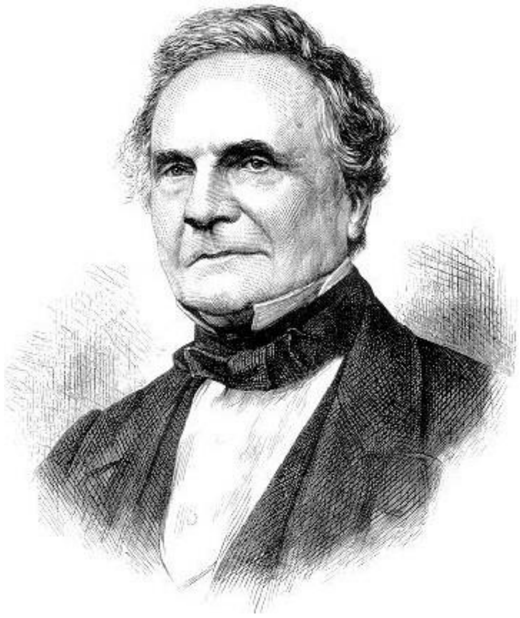
History – 19th century

- 在19世纪末，对偏微分方程的主要工作都是在理论分析方面。
- Lipschitz 建立了一阶微分方程的存在性定理。
- Hermite 在函数理论和方程求解方面也有很重要的贡献。其中Hermite方程后来被证明在求解Schrodinger的波动方程很有用。
- Bernhard Riemann 在微分方程的理论基础的建立上有很大的贡献。他的结果在动力学和物理中的许多方面都很有用。

History – 19th century

- 查尔斯．巴贝奇（1791 -1871 ）
- 数学家、发明家兼机械工程师
- 问题：当时构造数表很麻烦

- 差分机又称差分引擎
  - Difference Engine

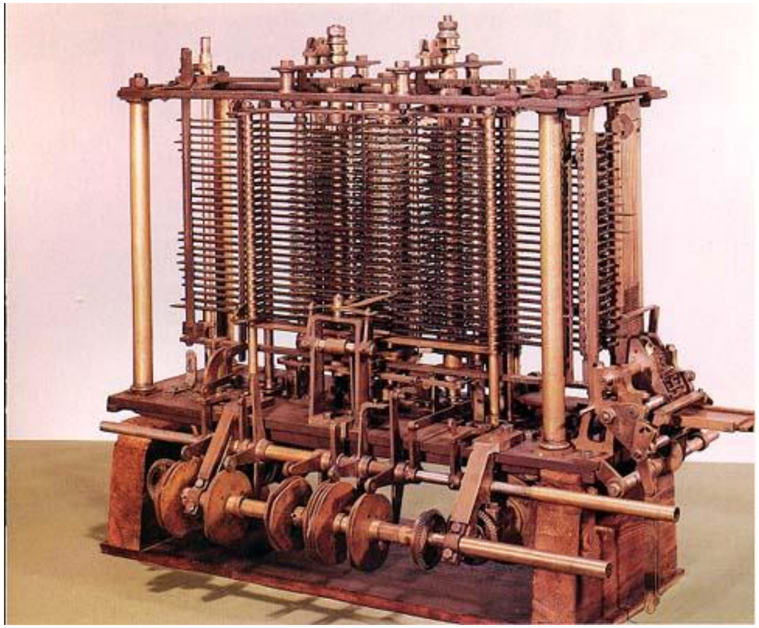


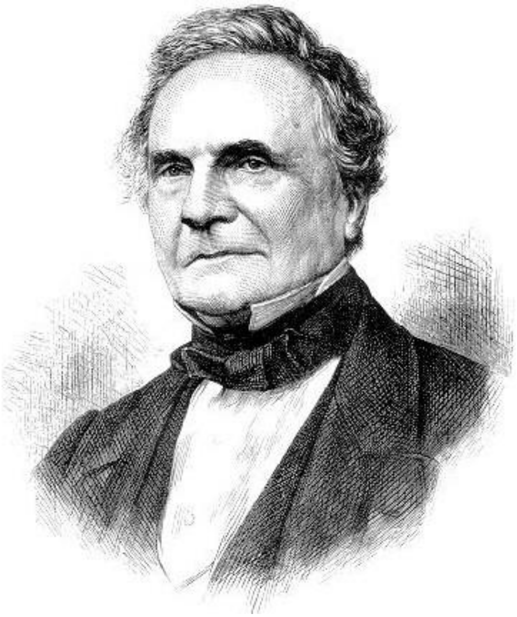
查尔斯．巴贝奇
Charles Babbage

资料来源：
http://cn.engadget.com/2011/04/27/charles-babbages-difference-and-analytical-engines/

History – 19th century

- 差分机又称差分引擎 （未完成）
  - Difference Engine



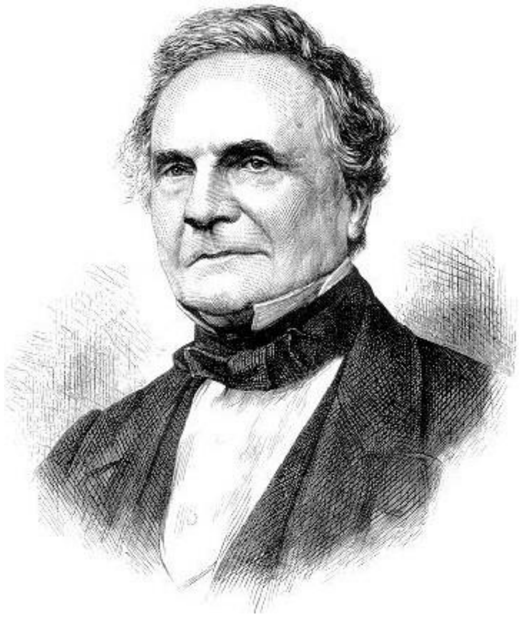


查尔斯．巴贝奇
Charles Babbage

History – 19th century

- 分析机（设计稿）
  - 基于机械运算
  - 具有现代计算机类似的体系结构
- 差分机2号（设计稿）
  - 英国伦敦科学博物馆于1985-2002年间实现

优酷视频地址：
http://v.youku.com/v_show/id_XMjE5MTU4Mjcy.html



查尔斯．巴贝奇
Charles Babbage

History – numerical approach

- 微分方程另一个主要的推动力是有效的**数值算法**。
- Carl Runge 在微分方程数值解方面做了许多工作。
  - 他的研究中用了很多数学以至于物理学家们认为他是数学家，而他的工作都是为了解决物理问题以至于数学家们都认为他是物理学家。
  - 著名的 Runge-Kutta方法现在依然在被使用。
- 到了20世纪后半叶，由于计算机技术的发展，许多数学家和计算机学家在用微分方程数值解方面做了许多工作。

Summary

- 微分方程涉及物理等学科的各个方面。它的进步是和生产实践分不开的。
- 微分方程的发展是和微积分的发展密切相关的。
- 近代的计算机技术使得微分方程数值解成为可能。

目录

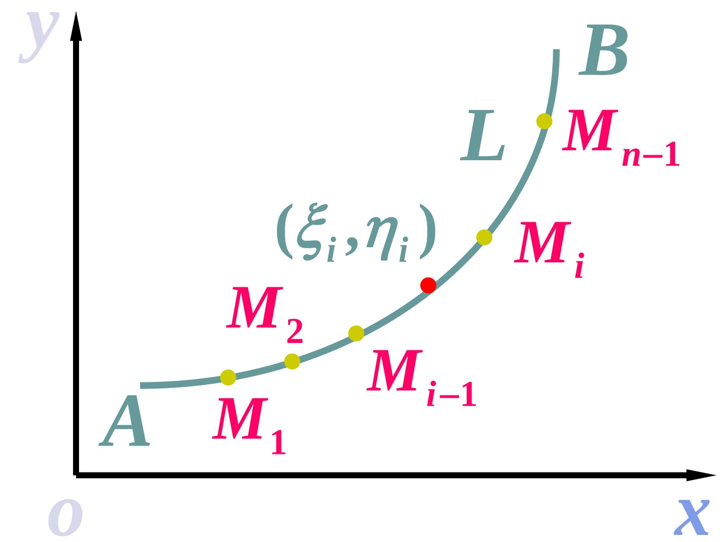
- 微分方程的产生历史
- 微积分初步
    - 曲线积分:弧长、参数、坐标
    - 曲面积分：面积、坐标
    - 微分方程基本概念
- 三个基本的偏微分方程
- 偏微分方程的求解

弧长曲线积分

1. 实例：曲线形构件的质量

$\overset{\frown}{AB}$ 的线密度 $\rho(x,y)$ 连续，

求 $\overset{\frown}{AB}$ 的质量M。



匀质之质量 $\quad M=\rho\cdot s.$

分割 $\quad M_1,M_2,\cdots,M_{n-1}.\ \Delta s_i$表示 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 的长度。

取近似 $\quad \forall(\xi_i,\eta_i)\in\overset{\frown}{M_{i-1}M_i},\quad \Delta M_i\approx\rho(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta s_i.$

求和 $$M\approx\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta s_i.$$

取极限 $$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta s_i.$$

(λ: 小弧段的最大长度)

2. 定义

设L为 xoy 面内一条光滑曲线弧,函数 $f(x,y)$ 在 L 上有界.用L上的点$M_1, M_2, \cdots, M_{n-1}$ 把 L 分成 n 个小段.设第 i 个小段的长度为Δs_i,又 (ξ_i,η_i) 为第 i 个小段上任意取定的一点,作乘积 $f(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta s_i$,并作和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta s_i$. 如果当各小弧段的 长度的最大值 $\lambda \to 0$时，这和的极限存在，则称此极限为函数 $f(x,y)$在曲线弧 L 上对弧长的曲线积分或 **第一类曲线积分**，记作 $\int_L f(x,y)ds$，即

$$\int_L f(x,y)ds = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta s_i .$$

$$\int_{\boxed{L}} \boxed{f(x,y)}\, ds = \lim_{\lambda\to 0} \boxed{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta s_i}.$$

积分弧段

被积函数

积分和式

曲线形构件的质量 $M=\int_L \rho(x,y)ds.$

存在条件:

当 $f(x, y)$ 在光滑曲线弧 L 上**连续**时, 对弧长的曲线积分 $\int_L f(x,y)ds$ 存在.

推广

$f(x,y,z)$ 在空间曲线弧 Γ 上对弧长的曲线积分为

$$\int_\Gamma f(x,y,z)ds = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\Delta s_i.$$

注意:

1. 若 L(或Γ)是分段光滑的，($L = L_1 + L_2$)

$$\int_{L_1+L_2} f(x,y)ds = \int_{L_1} f(x,y)ds + \int_{L_2} f(x,y)ds.$$

2. 函数 $f(x,y)$ 在闭曲线 L上对弧长的曲线积分记为

$$\oint_L f(x,y)ds.$$

3. 若被积函数 $f(x,y) \equiv 1$, 则

$$\int_L ds = L\text{的弧长。}$$

性质

$$(1)\ \int_L [f(x,y) \pm g(x,y)]ds = \int_L f(x,y)ds \pm \int_L g(x,y)ds.$$

$$(2)\ \int_L kf(x,y)ds = k\int_L f(x,y)ds \quad (k\text{为常数}).$$

$$(3)\ \int_L f(x,y)ds = \int_{L_1} f(x,y)ds + \int_{L_2} f(x,y)ds.$$

$$(L = L_1 + L_2).$$

参数曲线积分

定理 设 $f(x,y)$在曲线弧 L上有定义且连续，L的参数方程为 $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}$ $(\alpha \le t \le \beta)$

其中$\varphi(t)$, $\psi(t)$在$[\alpha,\beta]$上有一阶连续导数，且

$$\int_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$$

$(\alpha < \beta)$

证略。

这里， $L: \begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t). \end{cases}$ $\alpha \le t \le \beta.$

$$ds = \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt.$$

曲线 $L: \begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t). \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta.$

$$ds=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt.$$

$$\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$$

注意:

1. 定积分的下限 α 一定要小于上限 β;

2. $f(x,y)$ 中 x,y 不彼此独立，而是相互有关的.

特殊情形

(1) $L: y=\psi(x) \qquad a \le x \le b.$

$$L:\begin{cases} x = x, \\ y=\psi(x). \end{cases} \quad a \le x \le b. \qquad ds=\sqrt{1+\psi'^2(x)}\,dx.$$

$$\int_L f(x,y)ds=\int_a^b f[x,\psi(x)]\sqrt{1+\psi'^2(x)}dx. \quad (a<b)$$

(2) $L: x=\varphi(y) \qquad c \le y \le d.$

$$L:\begin{cases} x=\varphi(y), \\ y = y. \end{cases} \quad c \le y \le d. \qquad ds=\sqrt{1+\varphi'^2(y)}\,dy.$$

$$\int_L f(x,y)ds=\int_c^d f[\varphi(y),y]\sqrt{1+\varphi'^2(y)}dy. \quad (c<d)$$

几何与物理意义

(1) 当 $\rho(x,y)$ 表示 L 的线密度时，

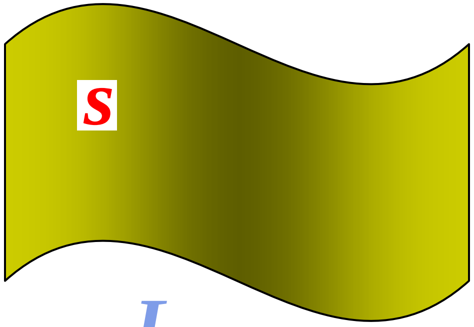
$$M=\int_L \rho(x,y)ds;$$

(2) 当 $f(x,y)\equiv 1$ 时，$L_{\text{弧长}}=\int_L ds;$

(3) 当 $f(x,y)$ 表示立于 L 上的柱面在点 (x,y) 处的高时，

$$S_{\text{柱面面积}}=\int_L f(x,y)ds.$$

$z=f(x,y)$



L

坐标曲线积分

实例：变力沿曲线所作的功

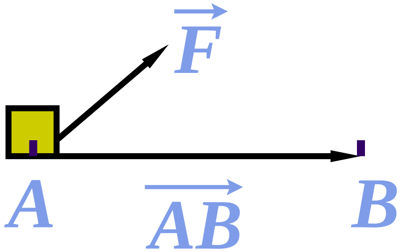
设一质点在 xoy 面内从点 A 沿光滑曲线弧 L 移动到点 B。在移动过程中，这质点受到力

$$\vec{F}(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$$

的作用，其中 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在 L 上连续，求在上述移动过程中变力 $\vec{F}(x,y)$ 所作的功 W。

(1) 常力 $\vec{F}$，质点沿直线从 A 移到 B，$\vec{F}$ 所作的功

$$W=\vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}.$$



(2) $\vec{F}$ 是变力，且质点沿曲线 L 移动。

分割 $A = M_0,\ M_1(x_1, y_1), \cdots,\ M_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1}),\ M_n = B.$

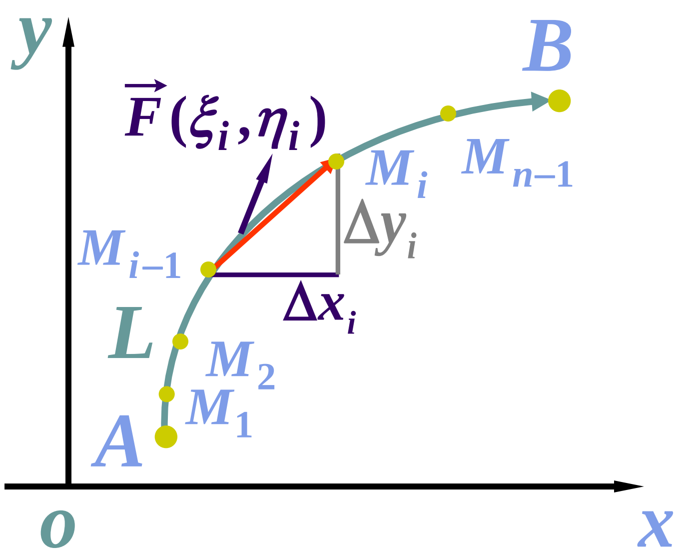
取近似 $\overrightarrow{M_{i-1}M_i} = (\Delta x_i)\vec{i} + (\Delta y_i)\vec{j}.$

取 $\vec{F}(\xi_i, \eta_i)$

$$= P(\xi_i, \eta_i)\vec{i} + Q(\xi_i, \eta_i)\vec{j},$$

$$\Delta W_i \approx \vec{F}(\xi_i, \eta_i) \cdot \overrightarrow{M_{i-1}M_i},$$

$$= P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i.$$



求和 $W = \sum_{i=1}^{n} \Delta W_i \approx \sum_{i=1}^{n} [P(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta y_i].$

取极限 $W = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} [P(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta y_i].$

λ表示小弧段的最大长度

定义

设 L 为 xoy 面内从点 A 到点 B 的一条有向光滑曲线弧，$P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在 L 上有界. 在 L 上沿 L 的方向任意插入一点列 $M_1(x_1,y_1), M_2(x_2,y_2), \cdots, M_{n-1}(x_{n-1},y_{n-1})$ 把 L 分成 n 个有向小弧段 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ $(i=1, 2, \cdots, n;$ $M_0=A,\ M_n=B)$.设 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, 点 (ξ_i,η_i) 为 $M_{i-1}M_i$ 上任意取定的点. 如果当各小弧段长度的最大值 $\lambda \to 0$ 时, $\sum\limits_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i$ 的极限存在, 则称此极限为函数 $P(x,y)$ 在有向曲线弧 L 上对坐标 x 的曲线积分(或称第二类曲线积分), 记作

$$\int_L P(x,y)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i .$$

$$\int_L P(x,y)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i.$$

类似地定义 $$\int_L Q(x,y)dy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i.$$

其中$P(x,y)$，$Q(x,y)$叫做被积函数，L叫积分弧段.

存在条件：当$P(x,y)$，$Q(x,y)$在光滑曲线弧L上连续时，第二类曲线积分存在.

组合形式：$$\int_L P(x,y)dx + \int_L Q(x,y)dy$$

$$= \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_L \vec{F}\cdot\vec{ds}.$$

其中$\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$，$\vec{ds} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$.

推广： 空间有向曲线弧 Γ

$$\int_\Gamma P(x,y,z)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i.$$

$$\int_\Gamma Q(x,y,z)dy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta y_i.$$

$$\int_\Gamma R(x,y,z)dz = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta z_i.$$

$$\int_\Gamma P(x,y,z)dx + \int_\Gamma Q(x,y,z)dy + \int_\Gamma R(x,y,z)dz$$

$$= \int_\Gamma P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

性质

(1) 如果把 L 分成 L_1 和 L_2 $(L = L_1 + L_2)$， 则

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_{L_1} Pdx + Qdy + \int_{L_2} Pdx + Qdy.$$

(2) 设 L 是有向曲线弧，$-L$ 是与 L 方向相反的有向曲线弧，则

$$\int_{-L} P(x,y)dx = -\int_L P(x,y)dx;$$

$$\int_{-L} Q(x,y)dy = -\int_L Q(x,y)dy$$

$$\int_{-L} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

即，对坐标的曲线积分与曲线的方向有关.

定理 设 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在有向曲线弧 L 上有定义且连续, L 的参数方程为 $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}$ 当参数 t 单调地由 α 变到 β 时, 点 $M(x,y)$ 从 L 的起点 A 沿 L 运动到终点 B, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ 在以 α 及 β 为端点的闭区间上具有一阶连续导数, 且 $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$, 则曲线积分 $\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 存在, 且

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

$$=\int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt$$

曲线 $L:\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t). \end{cases}$ 起点 $t=\alpha$, 终点 $t=\beta$.

$$dx=\varphi'(t)dt,\quad dy=\psi'(t)dt.$$

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

$$=\int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt$$

注意:

1. 定积分的下限 α 不一定要小于上限 β;

2. $f(x,y)$中 x,y 不彼此独立, 而是相互有关的.

特殊情形

(1) $L: y=\psi(x)$　　x起点为a，终点为b．　则

$$L:\begin{cases} x = x, \\ y=\psi(x). \end{cases} \qquad dx = dx,\ \ dy=\psi'(x)dx.$$

$$\int_L Pdx+Qdy=\int_a^b\{P[x,\psi(x)]+Q[x,\psi(x)]\psi'(x)\}dx.$$

(2) $L: x=\varphi(y)$　　y起点为c，终点为d．　则

$$L:\begin{cases} x=\varphi(y), \\ y = y. \end{cases} \qquad dx=\varphi(y)dy,\ \ dy=dy.$$

$$\int_L Pdx+Qdy=\int_c^d\{P[\varphi(y),y]\varphi'(y)+Q[\varphi(y),y]\}dy.$$

1. 曲线 $L:\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t). \end{cases}$ 起点 $t=\alpha$, 终点 $t=\beta$.

$$\int_L Pdx+Qdy=\int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt$$

2. 曲线 $L: y=\psi(x)$ x起点为a，终点为b. 则

$$\int_L Pdx+Qdy=\int_a^b \{P[x,\psi(x)]+Q[x,\psi(x)]\psi'(x)\}dx.$$

3. 曲线 $L: x=\varphi(y)$ y起点为c，终点为d. 则

$$\int_L Pdx+Qdy=\int_c^d \{P[\varphi(y),y]\varphi'(y)+Q[\varphi(y),y]\}dy.$$

(3) 推广 $\Gamma:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t), \\ z=\omega(t) \end{cases}$ t 起点α,终点β.

$$\int_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz$$

$$=\int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\varphi'(t)$$

$$+Q[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\psi'(t)$$

$$+R[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\omega'(t)\}dt$$

两类曲线积分之间的联系

设有向平面曲线弧为 L： $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$,

其切向量为 $\vec{T} = \{\varphi'(t), \psi'(t)\}$.

L上点(x, y)处的切向量的方向角为α, β,

$$\cos\alpha = \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}, \qquad \cos\beta = \frac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}},$$

则 $\int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta)ds$

$$= \int_L \left(\frac{P\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}} + \frac{Q\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}\right)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$$

则 $\int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta)ds$

$$= \int_L \left(\frac{P\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}} + \frac{Q\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}\right)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$$

$$= \int_L [P\varphi'(t) + Q\psi'(t)]\,dt$$

$$= \int_L Pdx + Qdy$$

即 $$\int_L Pdx + Qdy = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta)ds$$

--- 两类曲线积分之间的联系

推广

Γ上点(x, y, z)处的切线向量的方向角为$\alpha, \beta, \gamma,$

则 $\int_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz = \int_\Gamma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds$

可用向量表示

$$\int_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz = \int_\Gamma \vec{A}\cdot\vec{t}\,ds = \int_\Gamma \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_\Gamma A_t\,ds,$$

其中 $\vec{A} = \{P, Q, R\},$ $\vec{t} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\},$

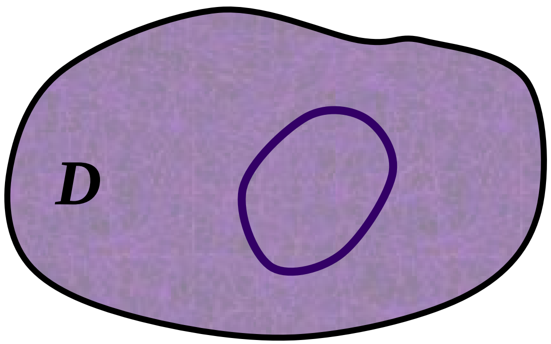
Γ上点(x, y, z)处的单位切向量

$d\vec{r} = \vec{t}\,ds = \{dx, dy, dz\}$ 有向曲线元；

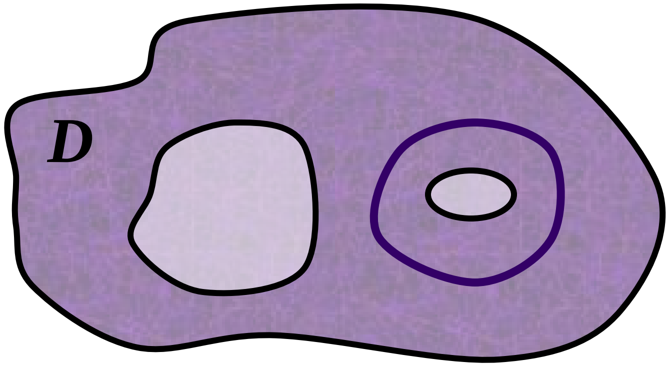
A_t为向量$\vec{A}$在向量$\vec{t}$上的投影.

格林公式

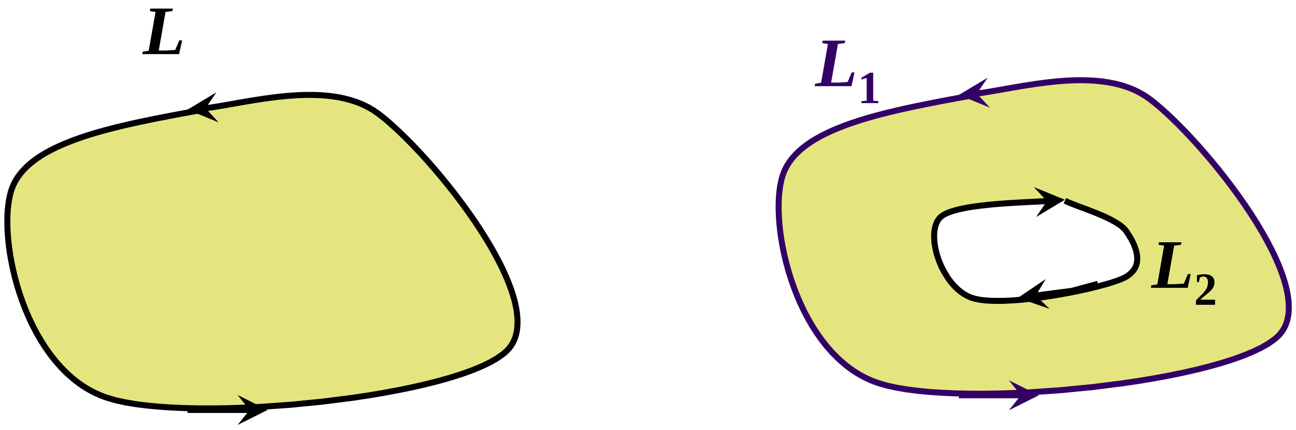
设D为平面区域，如果D内任一闭曲线所围成的部分都属于D，则称D为平面**单连通区域**，否则称为**复连通区域**.



单连通区域



复连通区域



边界曲线L的正向：当观察者沿边界行走时，区域

D 总在他的左边.

定理1 设闭区域D由分段光滑的曲线L围成, 函数$P(x,y)$及$Q(x,y)$在D上具有一阶连续偏导数，则有

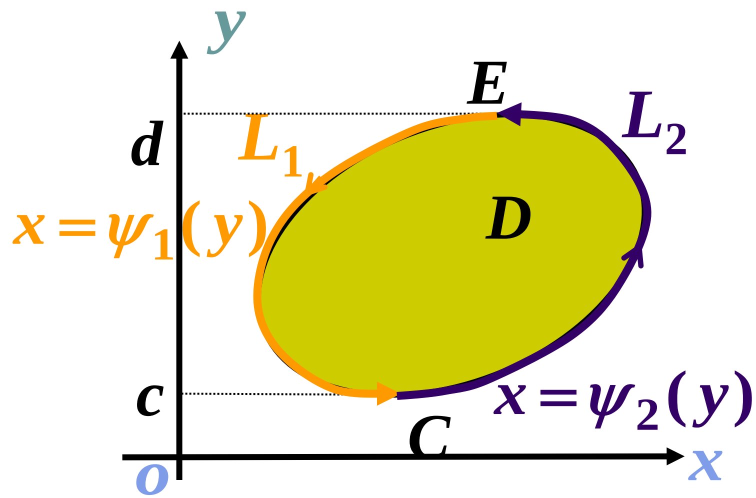
格林公式

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_L Pdx+Qdy$$

其中L是D的取正向的边界曲线,

证明 （1）若区域 D 既是 X—型

又是Y—型.



$$D:\begin{cases}\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y),\\ c\le y\le d.\end{cases}$$

$$\iint_D\frac{\partial Q}{\partial x}dxdy=\int_c^d\left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}\frac{\partial Q}{\partial x}dx\right]dy$$

$$=\int_c^d[Q(\psi_2(y),y)-Q(\psi_1(y),y)]dy$$

$$\oint_L Qdy=\int_{L_3}Qdy+\int_{L_4}Qdy$$

$$L_3:\ x=\psi_1(y),\quad y:d\to c.$$

$$\int_{L_3}Qdy=\int_d^c Q(\psi_1(y),y)dy=-\int_c^d Q(\psi_1(y),y)dy$$

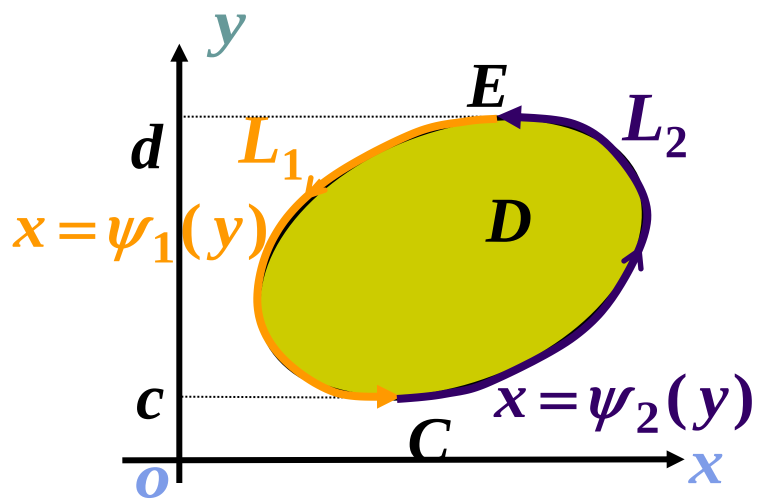
$$\oint_L Q\,dy = \int_{L_3} Q\,dy + \int_{L_4} Q\,dy$$

$$L_3:\ x = \psi_1(y), \qquad y: d \to c.$$

$$\int_{L_3} Q\,dy = \int_d^c Q(\psi_1(y), y)\,dy = -\int_c^d Q(\psi_1(y), y)\,dy$$

$$L_4:\ x = \psi_2(y), \qquad y: c \to d.$$

$$\int_{L_4} Q\,dy = \int_c^d Q(\psi_2(y), y)\,dy$$



$$\oint_L Q\,dy = \int_{L_3} Q\,dy + \int_{L_4} Q\,dy$$

$$= \int_c^d Q(\psi_2(y), y)\,dy - \int_c^d Q(\psi_1(y), y)\,dy$$

$$= \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy.$$

$$\oint_L Qdy = \int_{L_3} Qdy + \int_{L_4} Qdy$$

$$= \int_c^d Q(\psi_2(y), y)dy - \int_c^d Q(\psi_1(y), y)dy$$

$$= \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy.$$

类似，把 D 看成 X —型，有

$$\oint_L Pdx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy.$$

两式相加得 $\displaystyle \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \oint_L Pdx + Qdy.$

设闭区域D由分段光滑的曲线L围成，函数$P(x,y)$及$Q(x,y)$在D上具有一阶连续偏导数，则有

格林公式

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_L Pdx+Qdy$$

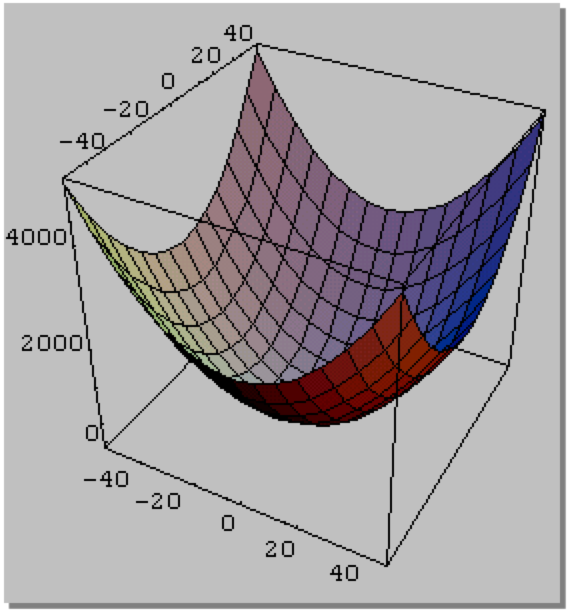
其中L是D的取正向的边界曲线，

格林公式的实质：沟通了沿闭曲线的积分与二重积分之间的联系.

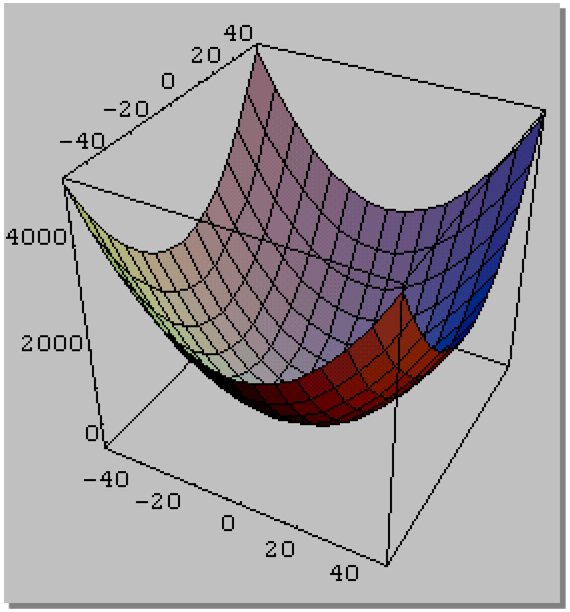
面积曲面积分

实例 若曲面Σ是光滑的，它的面密度为连续函数 $\rho(x,y,z)$，求它的质量.

所谓曲面光滑即曲面上各点处都有切平面，且当点在曲面上连续移动时，切平面也连续转动.



实例 若曲面Σ是光滑的，它的面密度为连续函数 $\rho(x,y,z)$，求它的质量



分割 把Σ分成n小块ΔS_i（ΔS_i也表示第i小块曲面的面积）.

取近似 $\forall(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Delta S_i$

$$\Delta M_i \approx \rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\Delta S_i$$

求和 $$M\approx\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\Delta S_i.$$

取极限 $$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\Delta S_i.$$

设曲面Σ是光滑的，函数$f(x,y,z)$在Σ上有界.把Σ分成n小块ΔS_i（ΔS_i同时也表示第i小块曲面的面积），设点(ξ_i,η_i,ζ_i)为ΔS_i上任意取定的点, 作乘积

$f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\Delta S_i$，并作和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\Delta S_i$,

若当各小块曲面直径的最大值$\lambda\to 0$时，和式的极限存在，则称此极限为函数$f(x,y,z)$在曲面Σ上对面积的曲面积分或第一类曲面积分．记为

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS.$$

被积函数

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$$

积分曲面

(1) $\iint\limits_{\Sigma} kf(x,y,z)\,dS = k\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS;$

(2) $\iint\limits_{\Sigma}[f(x,y,z)+g(x,y,z)]\,dS$

$$= \iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS + \iint\limits_{\Sigma} g(x,y,z)\,dS;$$

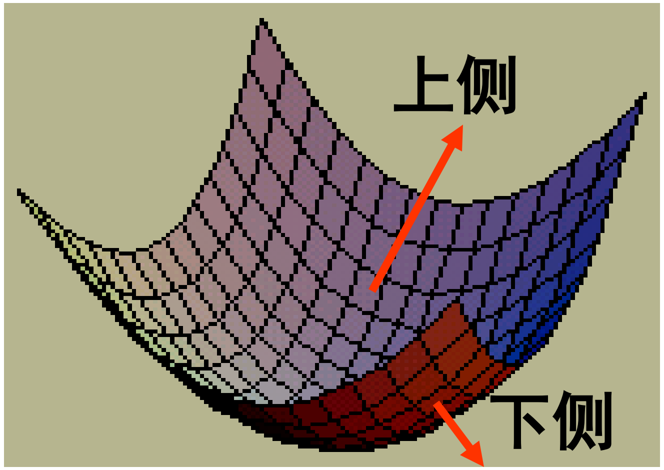
(3) 若Σ可分为分片光滑的曲面 Σ_1及Σ_2，则

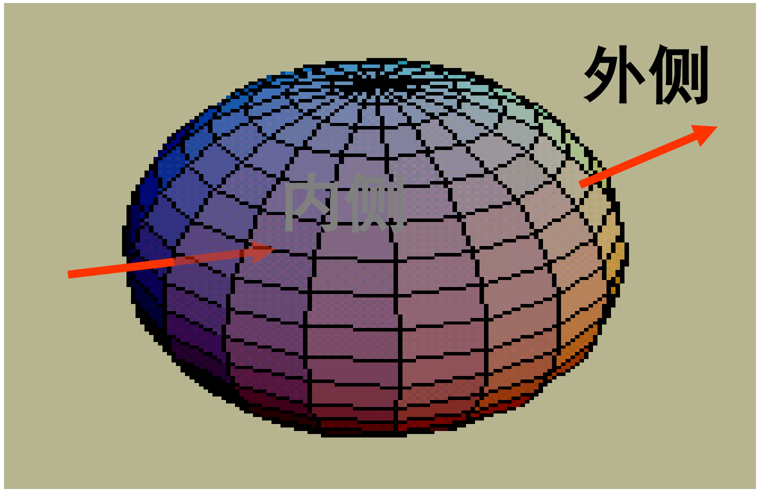
$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS = \iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)\,dS + \iint\limits_{\Sigma_2} g(x,y,z)\,dS.$$

特别， 当 $f(x,y,z)\equiv 1$时， $\iint\limits_{\Sigma} dS =$ Σ的面积。

坐标曲面积分

观察以下曲面的侧（假设曲面是光滑的）

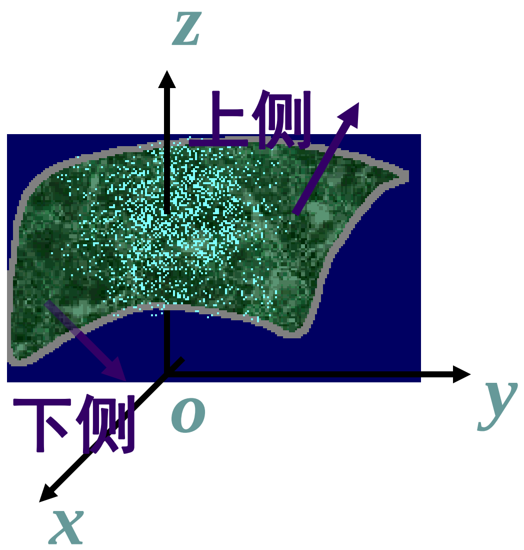
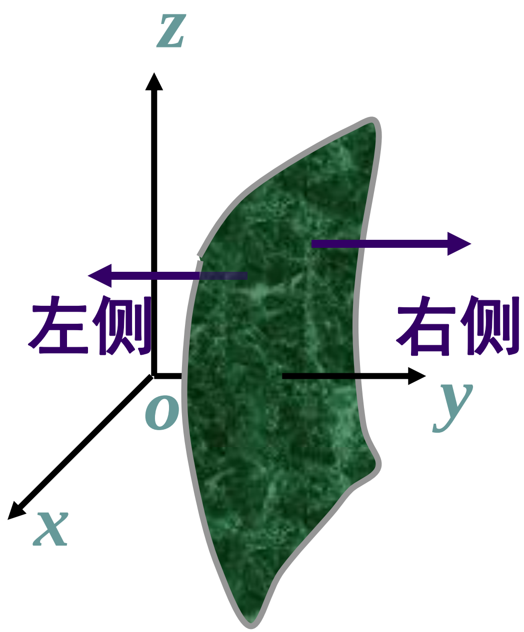
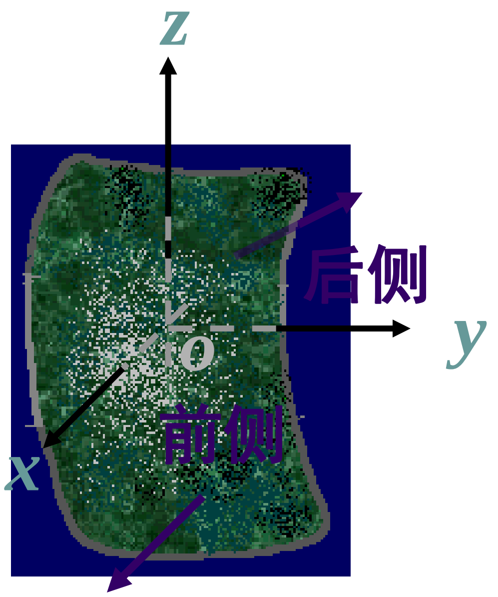




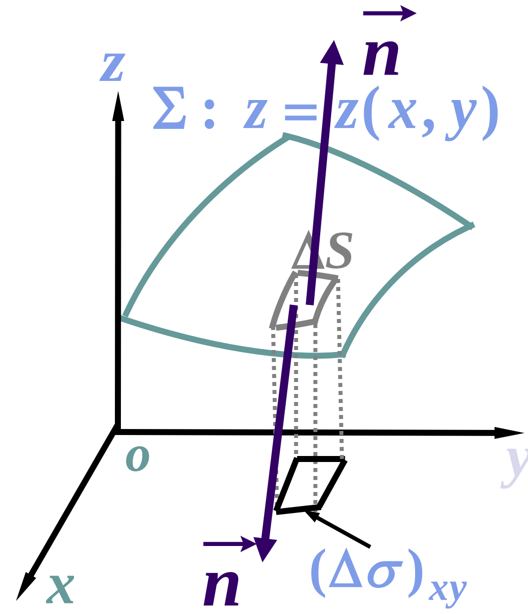
曲面分上侧和下侧　　　　曲面分内侧和外侧

曲面法向量的指向决定曲面的侧.

决定了侧的曲面称为有向曲面.


z
上侧
下侧
o
y
x

z
左侧
右侧
o
y
x

z
后侧
o
y
前侧
x

曲面的投影



在有向曲面 Σ 上取一小块曲面

ΔS，规定 ΔS 在 xoy 面上的投影 $(\Delta S)_{xy}$ 为

$$(\Delta S)_{xy} = \begin{cases} (\Delta\sigma)_{xy} & \text{当} \cos\gamma > 0 \text{时} \quad \text{上侧} \\ -(\Delta\sigma)_{xy} & \text{当} \cos\gamma < 0 \text{时}. \quad \text{下侧} \\ 0 & \text{当} \cos\gamma = 0 \text{时} \end{cases}$$

其中 $(\Delta\sigma)_{xy}$ 表示投影区域的面积.

在有向曲面 Σ 上取一小块 曲面 ΔS， ΔS 在 xoz 面上的投影 $(\Delta S)_{xz}$ 为

$$(\Delta S)_{xz} = \begin{cases} (\Delta\sigma)_{xz} & \text{当} \cos\beta > 0 \text{时} \\ -(\Delta\sigma)_{xz} & \text{当} \cos\beta < 0 \text{时}. \\ 0 & \text{当} \cos\beta = 0 \text{时} \end{cases}$$

右侧

左侧

其中 $(\Delta\sigma)_{xz}$ 表示投影区域的面积.

在有向曲面 Σ 上取一小块 曲面 ΔS， ΔS 在 yoz 面上的投影 $(\Delta S)_{yz}$ 为

$$(\Delta S)_{yz}=\begin{cases}(\Delta\sigma)_{yz} & \text{当}\cos\alpha>0\text{时} \\ -(\Delta\sigma)_{yz} & \text{当}\cos\alpha<0\text{时}. \\ 0 & \text{当}\cos\alpha=0\text{时}\end{cases}$$

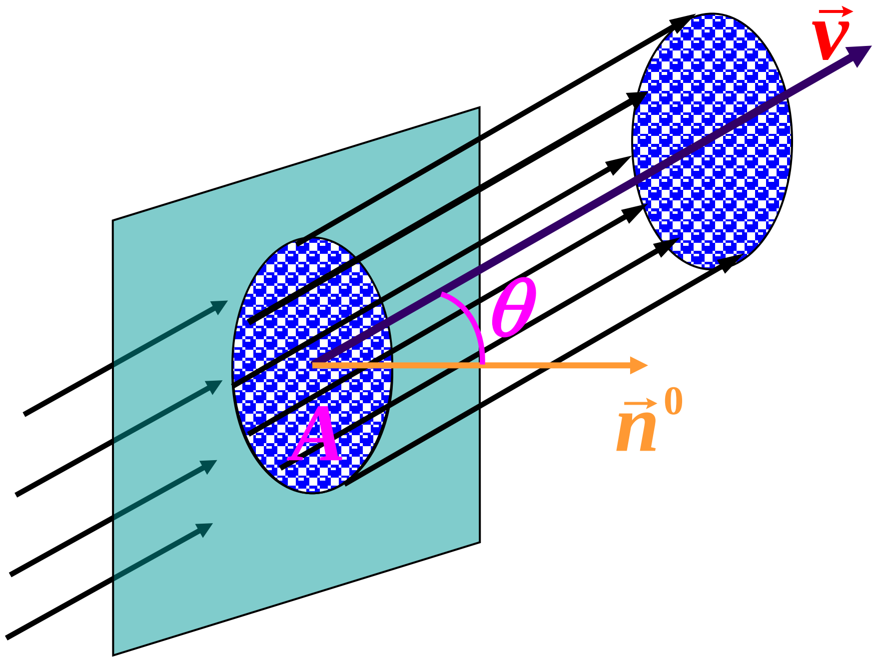
前侧

后侧

其中 $(\Delta\sigma)_{yz}$ 表示投影区域的面积.

实例：流向曲面一侧的流量.

（1） 流速场为常向量 $\vec{v}$，有向平面区域 A(面积为 A)。求单位时间流过 A 的流体的质量Φ（设密度为 1）.



流量

$$\Phi = A|\vec{v}|\cos\theta$$
$$= A\vec{v}\cdot\vec{n}^0.$$

(2) 设稳定流动的不可压缩流体(假定密度为 1)的速度场

由 $\vec{v}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$

给出，Σ 是速度场中的一片有向曲面，函数

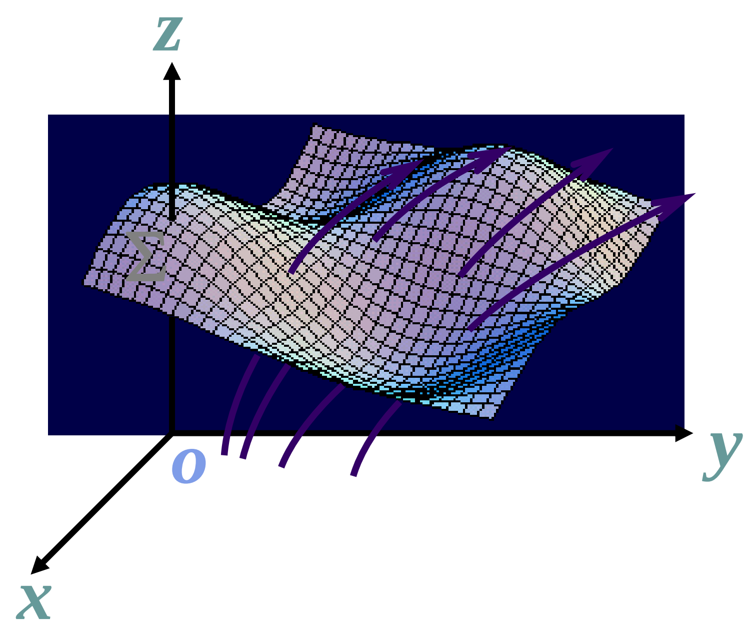
$$P(x,y,z),\quad Q(x,y,z),\quad R(x,y,z)$$

都在 Σ 上连续，求在单位时间内流向 Σ 指定侧的流体的质量Φ.

1. 分割

把曲面 Σ 分成n小块Δs_i

(Δs_i同时也代表第i小块曲面的面积)，

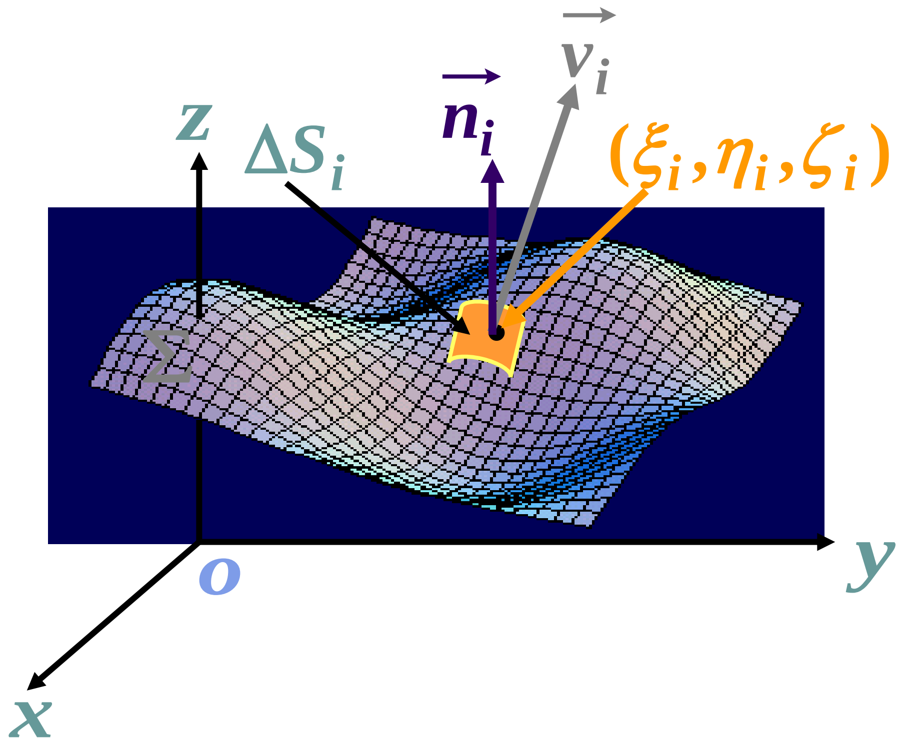


1. 分割

把曲面 Σ 分成n小块Δs_i

（Δs_i同时也代表第i小块

曲面的面积），



2. 取近似

在Δs_i上任取一点 (ξ_i,η_i,ζ_i)， 则该点流速为 $\vec{v}_i$.

法向量为 $\vec{n}_i$

$$\vec{v}_i = \vec{v}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$$

$$= P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\vec{i} + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\vec{j} + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\vec{k},$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$$
$$= P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\vec{i} + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\vec{j} + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\vec{k},$$

该点处曲面 Σ 的单位法向量

$$\vec{n}_i^{\,0} = \cos\alpha_i\,\vec{i} + \cos\beta_i\,\vec{j} + \cos\gamma_i\,\vec{k}$$

通过Δs_i流向指定侧的流量的近似值为

$$\Delta\Phi_i \approx \vec{v}_i \cdot \vec{n}_i\,\Delta S_i \qquad (i = 1,2,\cdots,n).$$

3. 求和

通过 Σ 流向指定侧的流量

$$\Phi \approx \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i \cdot \vec{n}_i\,\Delta S_i.$$

$$\Phi \approx \sum_{i=1}^{n} \vec{v_i} \cdot \vec{n_i}\, \Delta S_i .$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\alpha_i + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\beta_i$$

$$+ R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\gamma_i]\Delta S_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz} + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xz}$$

$$+ R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$$

4. 取极限　各小块曲面的直径最大值 $\lambda \to 0$,

$$\Phi = \lim_{\lambda\to 0}\{\sum_{i=1}^{n} [P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz} + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xz}$$

$$+ R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}\}$$

定义 设 Σ 为光滑的有向曲面，函数在 Σ 上有界，把 Σ 分成 n 块小曲面 ΔS_i (ΔS_i 同时又表示第 i 块小曲面的面积)，ΔS_i 在 xoy 面上的投影为 $(\Delta S_i)_{xy}$，(ξ_i, η_i, ζ_i) 是 ΔS_i 上任意取定的一点，如果当各小块曲面的直径的最大值 $\lambda \to 0$ 时，

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$$

存在，则称此极限为函数 $R(x, y, z)$ 在有向曲面 Σ 上对坐标 x, y 的曲面积分（也称第二类曲面积分）

记作 $\iint\limits_{\Sigma} R(x, y, z)dxdy$，即

记作 $\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy,$ 即

$$\iint\limits_{\Sigma} \underline{R(x,y,z)}\ dxdy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$$

被积函数

积分曲面

类似可定义

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}$$

$$\iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx}$$

组合形式:

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz + \iint_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx + \iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy$$

$$= \iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$$

物理意义:

$$\Phi = \iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$$

存在条件:

当$P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$在有向光滑曲面Σ上连续时, 对坐标的曲面积分存在.

性质:

1. $$\iint\limits_{\Sigma_1+\Sigma_2} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

$$= \iint\limits_{\Sigma_1} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy + \iint\limits_{\Sigma_2} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

2. $$\iint\limits_{-\Sigma} P(x,y,z)dydz = -\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz$$

$$\iint\limits_{-\Sigma} Q(x,y,z)dzdx = -\iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx$$

$$\iint\limits_{-\Sigma} R(x,y,z)dxdy = -\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy$$

2. $$\iint\limits_{-\Sigma} P(x,y,z)dydz = -\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz$$

$$\iint\limits_{-\Sigma} Q(x,y,z)dzdx = -\iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx$$

$$\iint\limits_{-\Sigma} R(x,y,z)dxdy = -\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy$$

$$\iint\limits_{\Sigma\text{上侧}} = -\iint\limits_{\Sigma\text{下侧}};\quad \iint\limits_{\Sigma\text{右侧}} = -\iint\limits_{\Sigma\text{左侧}};$$

$$\iint\limits_{\Sigma\text{前侧}} = -\iint\limits_{\Sigma\text{后侧}};\quad \oiint\limits_{\Sigma\text{内侧}} = -\oiint\limits_{\Sigma\text{外侧}};$$

设积分曲面 Σ 是由方程

$z = z(x, y)$所给出的曲

面上侧,

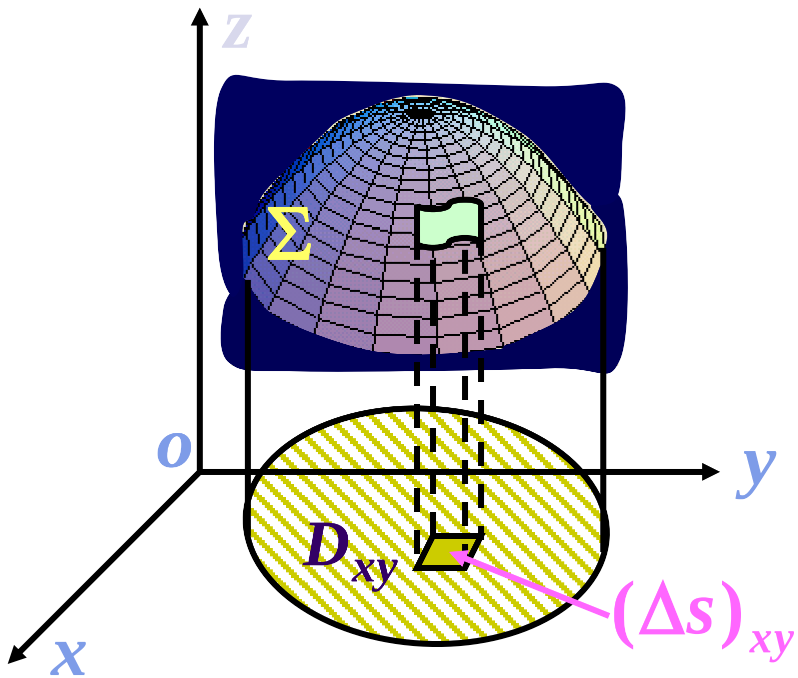
Σ 在 xoy 面上的投影区域为 D_{xy},

函数 $z = z(x, y)$在 D_{xy} 上

具有一阶连续偏导数,

被积函数 $R(x, y, z)$在 Σ

上连续.

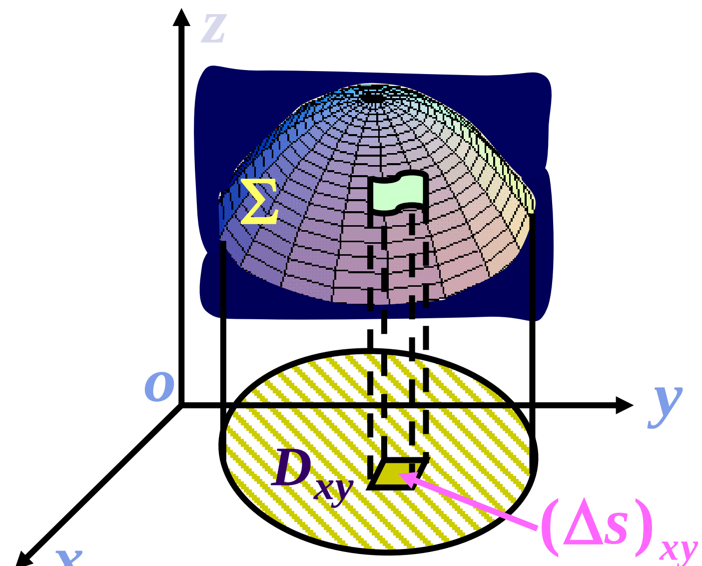


$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$$

因为，Σ 取上侧，$\cos\gamma > 0$,

因此，$(\Delta S_i)_{xy} = (\Delta\sigma)_{xy}$.

又 $\zeta_i = z(\xi_i,\eta_i)$,



$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,z(\xi_i,\eta_i))(\Delta\sigma_i)_{xy}$$

$$= \iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy.$$

λ为$(\Delta\sigma_i)_{xy}$中直径最大值

如果Σ由 $z = z(x, y)$ 给出, 则有

$$\iint_{\Sigma\text{上侧}} R(x, y, z)dxdy = \iint_{D_{xy}} R[x, y, z(x, y)]dxdy.$$

若Σ取下侧, $\cos\gamma < 0$, $\quad (\Delta S_i)_{xy} = -(\Delta\sigma)_{xy}$,

$$\iint_{\Sigma\text{下侧}} R(x, y, z)dxdy = -\iint_{D_{xy}} R[x, y, z(x, y)]dxdy$$

1. 如果 Σ 由 $z=z(x,y)$ 给出, 则有

$$\iint\limits_{\Sigma\text{上侧}} R(x,y,z)dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy.$$

$$\iint\limits_{\Sigma\text{下侧}} R(x,y,z)dxdy = -\iint\limits_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy$$

一投: 将曲面 Σ 向 xoy 面投影，得 D_{xy}.

二代: $f(x,y,z)\xrightarrow{\Sigma : z=z(x,y)} f(x,y,z(x,y))$;

三定号: Σ 上侧“+”号；Σ 下侧“–”号.

$\cos\gamma > 0$ $\cos\gamma < 0$

2. 如果Σ由 $x = x(y,z)$ 给出, 则有

$$\iint\limits_{\Sigma\text{前侧}} P(x,y,z)dydz = \iint\limits_{D_{yz}} P[x(y,z),y,z]dydz$$

$$\iint\limits_{\Sigma\text{后侧}} P(x,y,z)dydz = -\iint\limits_{D_{yz}} P[x(y,z),y,z]dydz$$

一投: 将曲面Σ向 yoz 面投影，得 D_{yz}.

二代: $f(x,y,z) \xrightarrow{\Sigma : x = x(y,z)} f(x(y,z),y,z);$

三定号: Σ前侧“+”号; Σ后侧“−”号.

$\cos\alpha > 0$ $\cos\alpha < 0$

3. 如果Σ由 $y = y(z, x)$ 给出, 则有

$$\iint\limits_{\Sigma\text{右侧}} Q(x, y, z)dzdx = \iint\limits_{D_{zx}} Q[x, y(z, x), z]dzdx$$

$$\iint\limits_{\Sigma\text{左侧}} Q(x, y, z)dzdx = -\iint\limits_{D_{zx}} Q[x, y(z, x), z]dzdx$$

一投: 将曲面Σ向 zox 面投影, 得 D_{zx}.

二代: $f(x, y, z) \xrightarrow{\Sigma : y = y(x,z)} f(x, y(x,z), z);$

三定号: Σ右侧"+"号; Σ左侧"−"号.

$\cos\beta > 0$ $\qquad$ $\cos\beta < 0$

注意: 曲面方程均是单值函数.

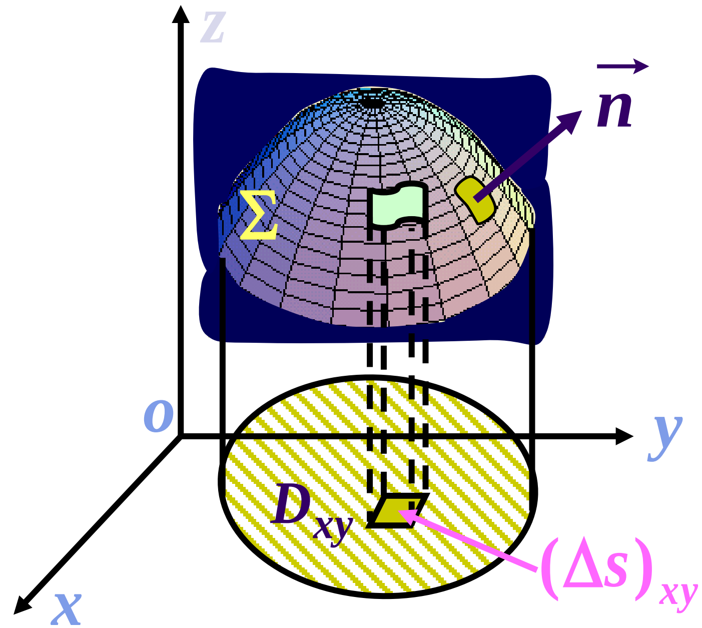
特别地，在 Σ 上恒有，

(1) $\cos\alpha \equiv 0$，即 Σ 平行于 x 轴，$\iint P\,dydz = 0$;

(2) $\cos\beta \equiv 0$，即 Σ 平行于 y 轴，$\iint Q\,dzdx = 0$;

(3) $\cos\gamma \equiv 0$，即 Σ 平行于 z 轴，$\iint R\,dxdy = 0$.

设有向曲面 Σ 是由方程 $z=z(x,y)$ 给出，Σ 在 xoy 面上的投影区域为 D_{xy}，函数 $z=z(x,y)$ 在 D_{xy} 上具有一阶连续偏导数，$R(x,y,z)$ 在 Σ 上连续



如果 Σ 取上侧，则

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy$$

$$\cos\alpha=\frac{-z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},\ \cos\beta=\frac{-z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},\ \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}.$$

$$\cos\alpha = \frac{-z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}, \quad \cos\beta = \frac{-z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}.$$

又 $dS = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy,$ 因此,

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\cos\gamma\, dS = \iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy$$

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = \iint_{\Sigma} R(x,y,z)\cos\gamma\, dS$$

两类曲面积分之间的联系

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

$$= \iint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS$$

向量形式

$$\iint_{\Sigma} \vec{A}\cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma} \vec{A}\cdot\vec{n}\,dS \quad 或 \quad \iint_{\Sigma} \vec{A}\cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma} A_n dS$$

其中$\vec{A}=\{P,Q,R\}$, $\vec{n}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$,

$d\vec{S}=\vec{n}\,dS=\{dydz,\ dzdx,\ dxdy\}$称为有向曲面元,

A_n为向量$\vec{A}$在$\vec{n}$上的投影.

Gauss公式

设空间闭区域Ω由分片光滑的闭曲面Σ围成。函数 $P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$、$R(x,y,z)$在Ω上具有一阶连续偏导数，则有公式

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=\oiint\limits_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

或

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=\oiint\limits_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$$

高斯公式

这里Σ是Ω的整个边界曲面的外侧，$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$是Σ上点(x,y,z)处的法向量的方向余弦

Gauss公式

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=\oiint_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

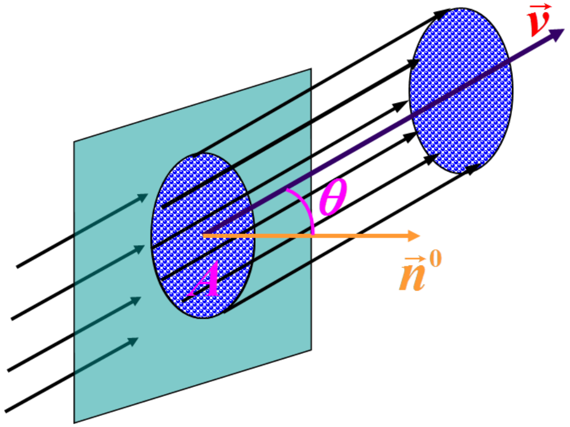
$$=\oiint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$$

Gauss 公式的实质

表达了空间闭区域上的三重体积分与

其边界曲面上的曲面积分之间的关系.

通量



设有向量场

$$\vec{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

沿场中某一有向曲面Σ的第二类曲面积分为

$$\Phi=\iint_{\Sigma}\vec{A}\cdot d\vec{S}=\iint_{\Sigma}\vec{A}\cdot\vec{n}^{0}dS$$

$$=\iint_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

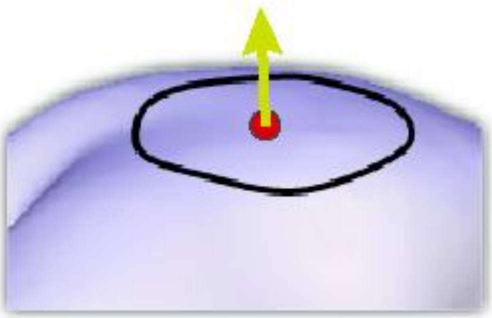
称为向量场 $\vec{A}(x,y,z)$ 向正侧穿过曲面Σ的通量.

散度

设有向量场$\vec{A}(x,y,z)$, 在场内作包围点M的闭曲面Σ, Σ包围的区域为V, 记体积为V. 若当V收缩成点M时，极限

$$\lim_{V\to M}\frac{\oiint\limits_{\Sigma}\vec{A}\cdot d\vec{S}}{V}$$

存在,



则称此极限值为$\vec{A}$在点M处的散度，记为$\mathrm{div}\,\vec{A}$.

散度在直角坐标系下的形式

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=\oiint_{\Sigma} A_n dS$$

$$\frac{1}{V}\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=\frac{1}{V}\oiint_{\Sigma} A_n dS$$

积分中值定理,
$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\Bigg|_{(\xi,\eta,\zeta)}=\frac{1}{V}\oiint_{\Sigma} A_n dS$$

两边取极限,
$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\lim_{\Omega\to M}\frac{1}{V}\oiint_{\Sigma} A_n dS$$

$$\operatorname{div}\vec{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.$$

高斯公式可写成 $$\iiint_{\Omega} div\vec{A}dv = \oiint_{\Sigma} A_n dS.$$

其中Σ是空间闭区域Ω的边界曲面，

A_n 是向量 $\vec{A}$ 在曲面Σ的外侧法向量上的投影.

$$(A_n = \vec{A} \cdot \vec{n}^0 = P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)$$

斯托克斯(stokes)公式

定理 设 Γ 为分段光滑的空间有向闭曲线，Σ 是以 Γ 为边界的分片光滑的有向曲面，Γ 的正向与 Σ 的侧符合右手规则，函数 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$ 在包含曲面 Σ 在内的一个空间区域内具有一阶连续偏导数，则有公式

$$\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=\oint_{\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz$$

证明思路

曲面积分 $\Rightarrow$ 二重积分 $\Rightarrow$ 曲线积分

便于记忆形式

$$\iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz$$

或

$$\iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} ds = \oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz$$

其中 $\vec{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}.$

Stokes 公式的**实质**:

表达了有向曲面上的曲面积分与其边界曲线上的曲线积分之间的关系.

当 Σ 是 *xoy* 面的平面闭区域时)

$$\boxed{\text{斯托克斯公式}} \xrightarrow{\text{特殊情形}} \boxed{\text{格林公式}}$$

此时， $\vec{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\} = \{0, 0, 1\}.$

环量

设有向量场

$$\vec{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

- *L*是场内一条有向分段光滑闭曲线，称曲线积分

$$\oint_L Pdx+Qdy+Rdz$$

- 为向量场*A*沿有向闭曲线*L*的环量

环量面密度

设有向量场

$$\vec{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

$$rot_n\vec{A}=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_L Pdx+Qdy+Rdz}{\Delta S}=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_L \vec{A}\cdot d\vec{l}}{\Delta S}$$

在向量场中，沿着不同的法线方向$\boldsymbol{n}$，环流面密度不同

旋度

设有向量场

$$\vec{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

- 在某点的最大环流面密度方向定义为旋度向量，即：

$$curl(\vec{A})=\vec{n}\lim_{\Delta S\to 0}\left.\frac{\oint_L Pdx+Qdy+Rdz}{\Delta S}\right|_{\max}=\vec{n}\lim_{\Delta S\to 0}\left.\frac{\oint_L \vec{A}\cdot d\vec{l}}{\Delta S}\right|_{\max}$$

$$curl(\vec{A}):=\nabla\times\vec{A} \quad \Rightarrow \quad \int_s \nabla\times\vec{A}\cdot d\vec{s}=\oint_l \vec{A}\cdot d\vec{l}$$

Stokes 公式！

旋度

设有向量场

$$\vec{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

- 旋度定义为:

$$\mathbf{curl\ A}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

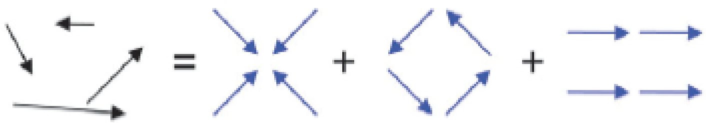
- 或者写成行列式形式:

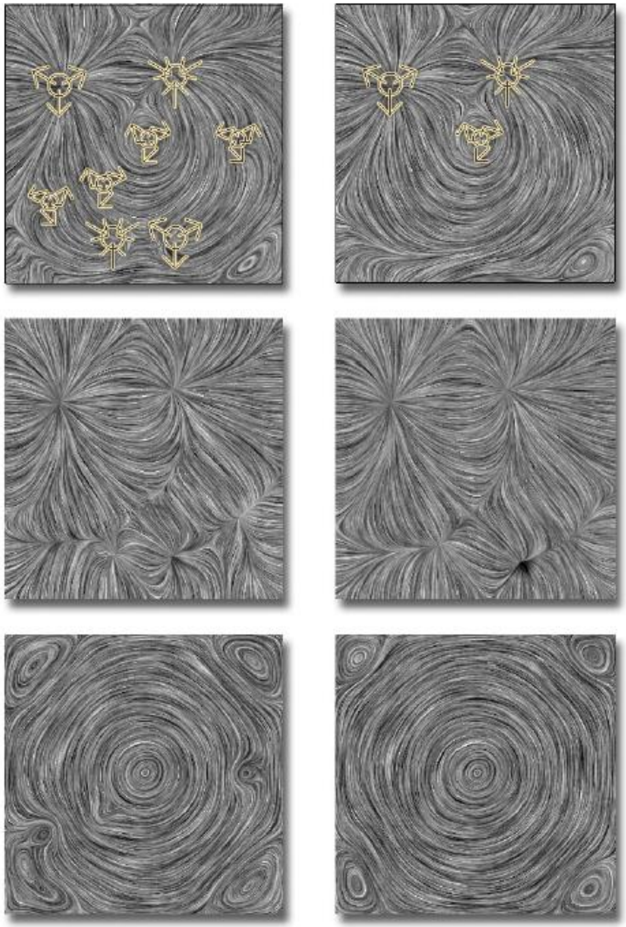
$$\mathbf{curl\ A}=\nabla\times\mathbf{A}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

三维向量场
Helmholtz-Hodge分解

- 给定三维中具有有限定义域的向量场ξ,

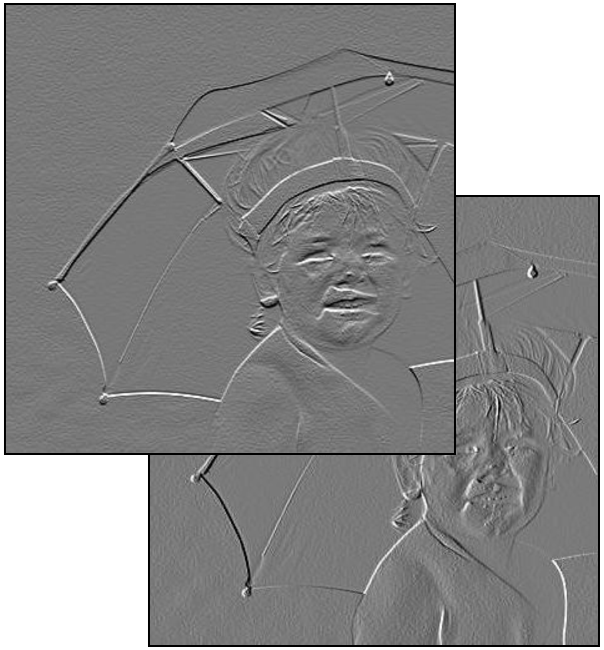
$$\xi = \nabla u + \nabla \times \mathbf{v} + \mathbf{h}$$





基本符号定义

- 梯度：从标量到向量 $$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$$
- 拉普拉斯算子：从标量到标量 $$\Delta \equiv \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$



基本符号定义

- $F(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))=P\vec{i}+Q\vec{j}$ 定义了一个向量

场，$\tau=\left(\dfrac{dx}{ds},\dfrac{dy}{ds}\right)$为单位切向量，$\nu=\left(\dfrac{dy}{ds},-\dfrac{dx}{ds}\right)$ 为单

位朝外法向量。

- 散度：从向量到标量 $divF\equiv\nabla\cdot=\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}$
- 旋度：从向量到向量

$$curlF\equiv\nabla\times F=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & 0\end{vmatrix}=(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\vec{k}$$

基本符号定义

- 考虑特殊的区域为以 (x0,y0)为圆心，半径为 r 的圆，则由连续性可知：

$$\nabla \times F(x_0, y_0) \cdot \overrightarrow{k} = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\pi r^2} \oint_C F \cdot \tau ds$$

$$\nabla F(x_0, y_0) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\pi r^2} \oint_C F \cdot \nu ds$$

- 因此，旋度是单位面积内最大环流（circulation），而散度是单位面积内之通量（流量之变化），这个形式最大的好处是不受坐标的影响。

Fourier 变换

- 设函数$f(x)$连续可微且绝对可积，则其Fourier变换

$$F(f) \equiv \hat{f}(\xi) = \int_{R^n} f(x) e^{-ix\xi} dx$$

其反变换为

$$F^{-1}(f) \equiv f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

- 性质
  - 微分性质 $F(\partial^\alpha f) = (i\xi)^\alpha F(f)$
  - 幂乘性质 $F((-i)^{|\alpha|} x^\alpha f) = \partial^\alpha F(f)$
  - 卷积性质 $F^{-1}(fg) = F^{-1}(f) F^{-1}(g)$

偏微分方程概论及其数值解法

基本概念

- 常微分方程与偏微分方程
  - 常微分方程（函数为单变量）

$$\frac{du}{dx}=0, u=u(x)$$

  - 偏微分方程（函数为多变量），通常包括 t

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0,\ \ u=u(x,y)$$

Three principle goals of PDE

- To discover the differential equation that describe a specified physical situation
- To find -- either exactly or approximately – the appropriate solution of that equation
- To interpret the solution that is found

基本概念—定义

- 2阶偏微分方程的定义

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0 \text{ 其中 } u = u(x, y)$$

- 例子

$$u_t - cu_x = 0 \ \ (\text{运动方程})$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \ \ (Laplace\text{方程})$$

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \ \ (\text{波动方程})$$

微分方程基本概念

- 偏微分方程的分类
  - 一阶，二阶，…：偏导的最大次数
  - 线性、非线性、拟线性(方程对最高项是线性的）
  - 齐次，非齐次：是否每个变量的阶数都相等

一阶拟线性方程组：
$$\frac{\partial u}{\partial y} - \boldsymbol{A}(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{h}(x, y, u) = 0$$

二阶拟线性方程：
$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f$$

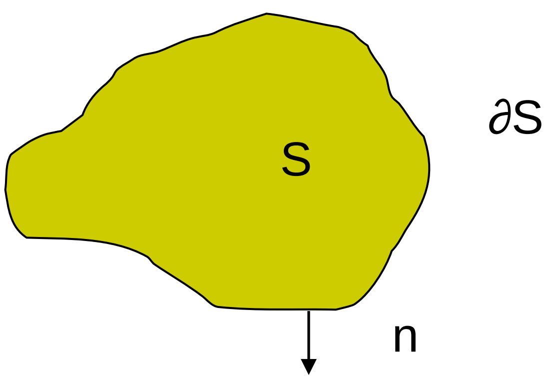
基本概念—定解条件

- 边界条件(BVP)和初始条件（IVP）

  偏微分方程一般可能有无穷多个解。实际中只要求解在某一定义域范围之内的解即可，如果在边界上限定了边界条件和初始条件，那方程的解一般是唯一的。这样才有物理意义。

基本概念—定解条件

- 边界条件
  - Dirichlet 条件：给出u在∂S上的值
  - Neumann 条件：给出 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 在∂S上的值
  - Robin 条件：给出 $au+b\frac{\partial u}{\partial n}$ 在∂S上的值（包括前两种）



基本概念—定解问题的适定性

- 稳定性：当初始数据或边界数据有微小变化时解的变化也应当微小。

- 适定性：如果定解问题的解在该函数空间存在，唯一并且稳定。

微分方程基本概念

- 对两个变量的二阶拟线性方程：

$$a(x,y,p)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b(x,y,p)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c(x,y,p)\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}+f(x,y,p)=0$$

如果对于固定的(x,y,u)，

有 $F=ac-b^2>0$ ，方程是椭圆型；

如果$F<0$， 方程是双曲型；

如果$F=0$， 方程是抛物型。

二次线性偏微分方程的分类

- 若 $\boldsymbol{A}=\left[a_{ij}\right]$是正定或负定的，则称为椭圆方程
- 若 $\boldsymbol{A}=\left[a_{ij}\right]$的特征值至少有一个为0，则称为抛物型方程
- 若 $\boldsymbol{A}=\left[a_{ij}\right]$ 化为标准型后取正值和取负值的系数的个数都大于1，则称为双曲型
- 例子

$$u_{xx}+u_{yy}=f(x,y)\text{（椭圆方程）}$$

$$u_{xx}-u_{yy}=f(x,y)\text{（双曲线方程）}$$

基本概念—叠加原理

- 叠加原理

  在物理，力学和化学等学科中，许多自然现象具有叠加效应，即几种不同因素同时出现时所产生的效果等于各个因素分别单独出现时产生的叠加（即总和）。

基本概念—变分原理

- 变分原理
  - **最小位能原理**(Hamilton原理)：任何力学系统，若给定$t=t_0$的起始状态和时刻$t=t_1$的终结状态，则真实运动区别于任何容许运动的地方在于：真实运动使定积分(T为总动能，U为总势能)

$$J=\int_{t_0}^{t_1} L dt \quad (L=T-U)$$

的一阶变分为零： $\delta J=0$

(L称为Lagrange密度函数)

基本概念—变分原理

- 关于一阶变分的定义说明：
- 假设真实运动函数为 $u(x,y,z,t)$

$$L = f(x,y,z,t,u,u_t,u_x,u_y,u_z)$$

是(x, y, z, t)的任意光滑函数，记 $\delta u = \varepsilon\eta$，

则一阶变分 δJ 的定义为

$$\delta J = \frac{dJ(u+\varepsilon\eta)}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\varepsilon,$$

- 得到方程(Euler方程)

$$f_u - \frac{d}{dt}f_{u_t} - \frac{d}{dx}f_{u_x} - \frac{d}{dy}f_{u_y} - \frac{d}{dz}f_{u_z} = 0$$

目录

- 微分方程的产生历史
- 偏微分方程基本概念
- 三个基本的偏微分方程
  - 双曲线方程(波动方程)
  - 抛物线方程(热传导方程)
  - 椭圆方程(位势方程)
- 偏微分方程的求解
  - 分析方法
  - 数值方法

目录

- 微分方程的产生历史
- 偏微分方程基本概念
- 三个基本的偏微分方程
  - 双曲线方程(波动方程)
  - 抛物线方程(热传导方程)
  - 椭圆方程(位势方程)
- 偏微分方程的数值求解
  - 分析方法
  - 数值方法

双曲线方程—定义

- 定义

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = f \qquad u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$$

一维齐次情况

- 边界条件

$$u(t,0) = \alpha(t)$$

$$u(t,a) = \beta(t)$$

- 初始条件

$$u(0,x) = f(x) \ ,\ 0 < x < a$$

$$u_t(0,x) = g(x) \ ,\ 0 < x < a$$

波动方程的导出

- 力学中的弦是指柔软的一维细线，根据Hook定律，其拉伸后所具有的位能，与其长度的增量成正比，比例系数τ称为张力。

- 如果以$u(x, t)$表示时刻t时，位于x处的弦离平衡位置的值，横振动是指弦的运动方向垂直于弦的平衡位置。考虑时间 t时微小的横振动。

波动方程的导出

- 假设x处的斜率 $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ 很小，假定 ρ 为线密度，
- 在时刻 t 时的总动能是

$$T=\frac{\rho}{2}\int_0^l[\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}]^2dx$$

- 弦的伸长所具有的位能是

$$U_1=\tau[\int_0^l\sqrt{1+(\frac{\partial u}{\partial x})^2}dx-l]dx$$

$$\approx\tau[\int_0^l(1+\frac{1}{2}u_x^2)dx-l]=\frac{\tau}{2}\int_0^l u_x^2dx$$

波动方程的导出

- 若弦上还有以线密度为$F(x, t)$、方向与u轴一致的外力左右，则相应的内能为

$$U_2 = -\int_0^l Fu\,dx$$

- 则 $f = L = T - U_1 - U_2 = \dfrac{\rho u_t^2}{2} - \dfrac{\tau u_x^2}{2} + Fu$

$$f_u = F, f_{u_t} = \rho u_t, f_{u_x} = -\tau u_x$$

波动方程的导出

- 应用**最小位能原理**计算变分:

$$f_u - \frac{d}{dt} f_{u_t} - \frac{d}{dx} f_{u_x} - \frac{d}{dy} f_{u_y} - \frac{d}{dz} f_{u_z} = 0$$

$$f_u = F, f_{u_t} = \rho u_t, f_{u_x} = -\tau u_x$$

- 得到相应的Euler方程为

$$\rho u_{tt} = \tau u_{xx} + F(x,t)$$

目录

- 微分方程的产生历史
- 偏微分方程基本概念
- 三个基本的偏微分方程
  - 双曲线方程(波动方程)
  - 抛物线方程(热传导方程)
  - 椭圆方程(位势方程)
- 偏微分方程的求解
  - 分析方法
  - 数值方法

抛物线方程（热传导方程）

- 定义

$$u_t - \beta\Delta u = f$$

一维形式 $$u_t - \beta u_{xx} = 0$$

- 初始条件

$$u(0,x) = f(x)\ ,\quad 0 < x < a$$

- 边界条件

$$(1-c_1)u(t,0) - c_1 u_x(t,0) = g_1(t)$$

$$(1-c_1)u(t,a) - c_1 u_x(t,a) = g_1(t)$$

抛物线方程

- 二维抛物线方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\beta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad u=u(t,x,y)$$

  - 初始条件

$$u(0,x,y)=f(x,y) \quad , \qquad (x,y)\in R$$

  - 边界条件

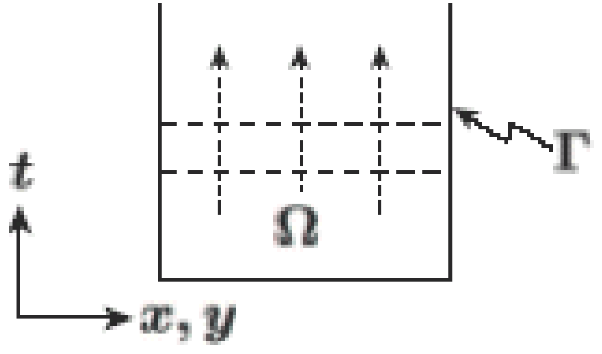
$$u(t,x,y)=g(t,x,y) \quad , \qquad (x,y)\in \partial R$$

热传导方程的导出

- 在三维空间中，求物体Ω 的内部温度分布，设在 t 时刻（x, y, z)处的温度为$u(x, y, z, t)$，根据热学中的Fourier定律：**热流向量q与温度梯度成正比：**

$$\mathbf{q} = -k(x, y, z)\nabla u = -k(u_x, u_y, u_z)$$

- k是物体的热传导系数，负号表示热量由温度高向温度低流



热传导方程的导出

- 在dt时间内流过曲面元dS的热量为dQ,则

$$dQ = \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}dSdt = -k\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}dSdt$$

n表示越过曲面时温度要增加的法线方向

- 在物体Ω内任取一闭曲面Γ，它所包围的区域为G，则从时刻t_1到t_2流进该曲面的热量是

$$Q = \int_{t_1}^{t_2}\oiint_{\Gamma} k(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}dSdt$$

热传导方程的导出

- 同时流入的这些热量就是使物体内部的温度发生变化的热量

$$\iiint_G c(x,y,z)\rho(x,y,z)[u(x,y,z,t_2)-u(x,y,z,t_1)]dxdydz$$

- 所以得到

$$Q=\int_{t_1}^{t_2}\oiint_\Gamma k(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}dSdt=$$

$$\iiint_G c(x,y,z)\rho(x,y,z)[u(x,y,z,t_2)-u(x,y,z,t_1)]dxdydz$$

热传导方程的导出

- 利用Gauss公式化简

$$\int_{t_1}^{t_2}\iiint_G\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]dxdydz$$

$$=\iiint_G c(x,y,z)\rho(x,y,z)\left(\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial u}{\partial t}dt\right)dxdydz$$

- 由于t_1, t_2, G都是任意的，得到

$$c\rho u_t=(ku_x)_x+(ku_y)_y+(ku_z)_z$$

热传导方程的导出

- 如果物体是均匀的，c, ρ, k都是常数，记

$$a^2 = \frac{k}{c\rho}$$

则

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})$$

得到抛物线方程。

目录

- 微分方程的产生历史
- 偏微分方程基本概念
- 三个基本的偏微分方程
  - 双曲线方程(波动方程)
  - 抛物线方程(热传导方程)
  - 椭圆方程(位势方程)
- 偏微分方程的求解
  - 分析方法
  - 数值方法

椭圆方程（位势方程）

- Poisson方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y)$$

- *f*=*0*时称为**Laplace方程**或**调和方程**
- 表达势函数与场强之间关系的方程

- 在下节课，有关Poisson方程内容中会专门讲述

注意

- 波动方程描述的是能量可转换的情况，而热的传导或扩散是不可逆的过程，古典的变分原理不能应用，但能量守恒定律依然适用
- 还有一些偏微分方程可以应用质量守恒定律得到
- 这些从物理定律出发得到的偏微分方程，通常常被称为**数学物理方程**。

基本概念—偏微分方程的求解

- 偏微分方程**解析解**研究的主要问题
  - 解的存在性
  - 解的唯一性
  - 解的性质
    - 可微分性
    - 边界依赖性
- 偏微分方程**数值解**研究的主要问题
  - 解的稳定性
  - 解的收敛性