泛函与变分原理导引

Hongxin Zhang

2007-06-14

State Key Lab of CAD&CG, ZJU

内容提要

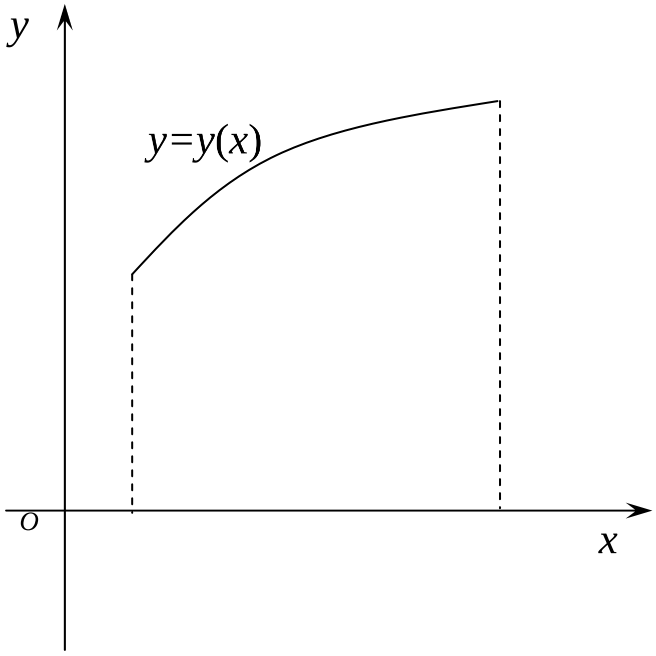
- 变分命题与一般极值问题
- 泛函的极值问题与欧拉方程，变分法基本定理
- 自然边界问题
- 拉格朗日乘子法

变分命题与一般极值问题

- 历史上有很多有名的极值问题，其求解方法可统称为变分法
  - 两点间的最短连线问题
  - 最速下降线问题
  - 短程线问题
  - …

两点间的最短连线问题

- 为什么“任意两点间的最短连线是连接两端的直线”?



两点间的最短连线问题

- 为什么"任意两点间的最短连线是连接两端的直线"?

- 问题的假设:
  - 二维平面空间，一点是坐标原点(0,0)，一点在(a,b)
  - 两点间的连接曲线是 $y = y(x)$
  - 曲线的弧长微元是 $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$ 或 $\mathrm{d}s = \sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x$
  - 曲线的总弧长是

$$s = \int_0^a (1+y'^2)^{1/2}\,\mathrm{d}x$$

s是标量，是$y'(x)$的一个广义函数，称为泛函，可记为$s(y')$

两点间的最短连线问题

- 问题的数学描述：找出具有曲线$y(x)$使得

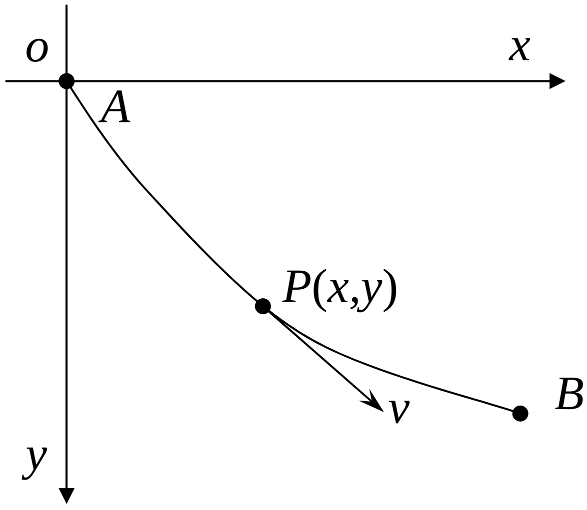
$$\min_{y'} \int_0^a (1+y'^2)^{1/2}\,\mathrm{d}x$$

- 同时必须满足端点约束条件 (constraint condition)

$$\begin{cases} y(0)=0 & x=0 \\ y(a)=b & x=a \end{cases}$$

最速降线(brachistochrone)问题

- 由伯努利于310多年前以公开信的形式提出
- 问题描述：
  - 设有两点A、B不在同意铅垂线上，在A、B两点间连接一条曲线，有一重物沿去曲线从A到B受重力作用自由下滑。若忽略摩擦力，问怎样的曲线使得从A到B的自由下滑时间最短？



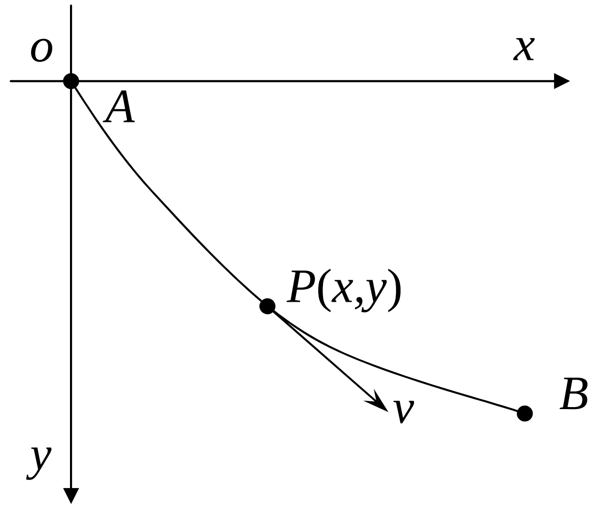
- 该曲线被称为最速降线
- 显然不是直线段

最速降线(brachistochrone)问题

- 问题的设定：
  - 设点A与原点重合，点B的坐标是(a,b)，重物从A点下落到P(x,y)点时，其速度是v
  - 重物质量是m，加速度是g

- 从A到P点时：
  - 失去的势能是 mgy
  - 获得的动能是 $mv^2/2$
  - 由能量守恒

$$v=\sqrt{2gy}$$



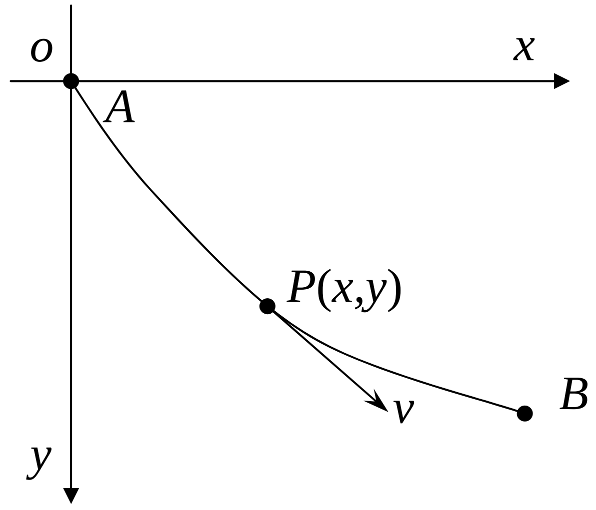
最速降线(brachistochrone)问题

- 推导：
  - 用s表示从点A到点P点的弧长，则

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v=\sqrt{2gy}$$

  - 因此可知

$$\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{2gy}}=\sqrt{\frac{1}{2gy}\left[1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]}dx$$



  - 从点A到点B的总时间是

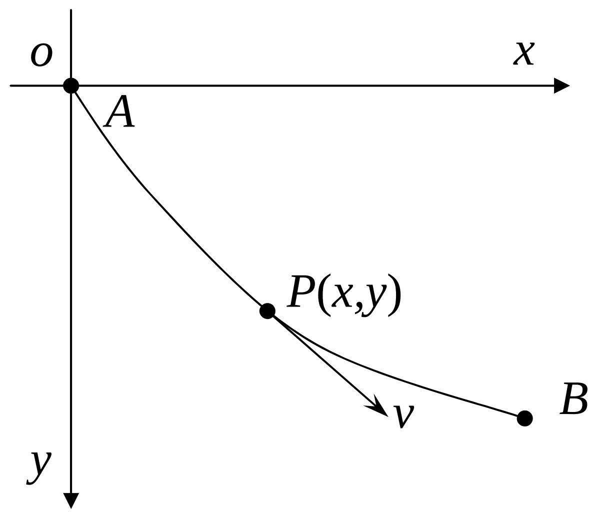
$$T=\int_0^a \mathrm{d}t=\int_0^a \sqrt{\frac{1}{2gy}\left[1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]}\mathrm{d}x$$

最速降线(brachistochrone)问题

- 变分命题描述
  - 从点A到点B的总时间是

$$T=\int_0^a \mathrm{d}t=\int_0^a \sqrt{\frac{1}{2gy}\left[1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]}\mathrm{d}x$$

  - T是$y(x)$, y'的泛函
  - 满足 $y(0)=0, y(a)=b$



变分命题 (I)

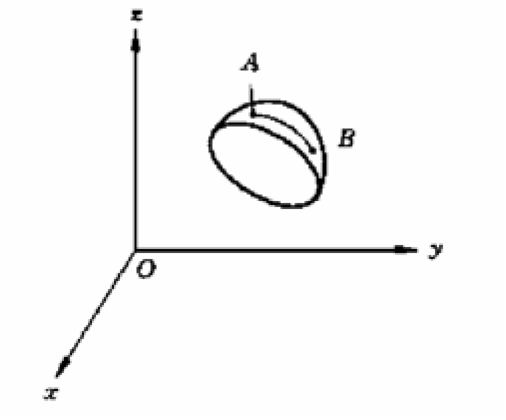
- 变分命题的实质是求泛函的极值问题

- 注释：
  - 在泛函的积分端点上，y(x)的数值已定，即y(0)=0, y(a)=b. 这种变分被称为边界已定的变分，是一种最常见的变分。
  - 在定义中y'必须存在，至少是分段连续。
  - 这种变分除端点为定值的**端点条件**外，并无其他约束条件，是最简单的变分问题。

测地线(geodesic line)问题

- 设 $\phi(x, y, z) = 0$为一已知曲面，求曲面 $\phi(x, y, z) = 0$上所给任意两点A、B间长度最短的曲线，这个最短曲线就被称为测地线，或称为短程线。

- 球面（如地球表面）上任意两点的测地线即为通过两点的大圆



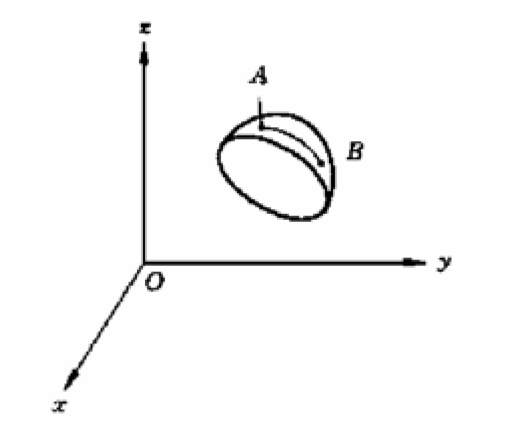
测地线(geodesic line)问题

- 设定：$A(x_1, y_1, z_1)$ 与 $B(x_2, y_2, z_2)$ 两点间的曲线长度为

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

  - 其中 $y = y(x)$, $z = z(x)$ 满足 $\phi(x, y, z) = 0$

- 变分命题：选取函数$y(x)$, $z(x)$
  - 在满足 $\phi(x, y, z) = 0$的条件下
  - 使泛函L最小



变分命题 (II)

- 与前两个问题的区别：
  - 测地线问题中有两个待定函数
  - 两个待定函数必须满足落在曲面上这一约束条件

- 这种变分被称为约束变分(constrained variation), 或者称为条件变分(conditional variation)

变分命题 (II)

- 第一类变分问题：
  - 被积函数包括一阶导数的变分问题
  - 满足端点约束条件
  - 在所有的足够光滑函数$y(x)$中，求使以下泛函为极值

$$\Pi(y)=\int_{\alpha}^{\beta}F(x,y,y')\mathrm{d}x$$

- 第二类变分问题：
  - 两个待定函数：$y(x)$，$z(x)$
  - 满足约束条件：$\phi(x,y,z)=0$
  - 满足端点约束条件
  - 在所有的足够光滑函数$y(x)$，$z(x)$中，求使以下泛函为极值

$$\Pi(y,z)=\int_{\alpha}^{\beta}F(x,y,y',z,z')\mathrm{d}x$$

变分命题 (III)

- 函数：$f(x)$是变量x的实函数，即在其定义域内，任一x值都有一个实数$f(x)$与之对应

- 泛函：$\Pi(y)$是函数$y(x)$的泛函，即在其定义域内，任一函数$y(x)$都有一个实数 $\Pi(y)$与之对应

- 变分命题：寻找$y(x)$使得泛函 $\Pi(y)$取极值

- 变分方法：设使泛函取得极值的函数$y(x)$存在，通过变分法求得这个极值函数$y(x)$所需满足的微分方程

变分命题 (III)

- 对函数而言，一阶导数为零的极值条件给出的是相对极大或相对极小，而不是绝对极大或绝对极小
- 在变分法中，泛函的极值条件给出的也只是相对极大或相对极小
- 导数为零只是必要条件

变分法中的符号

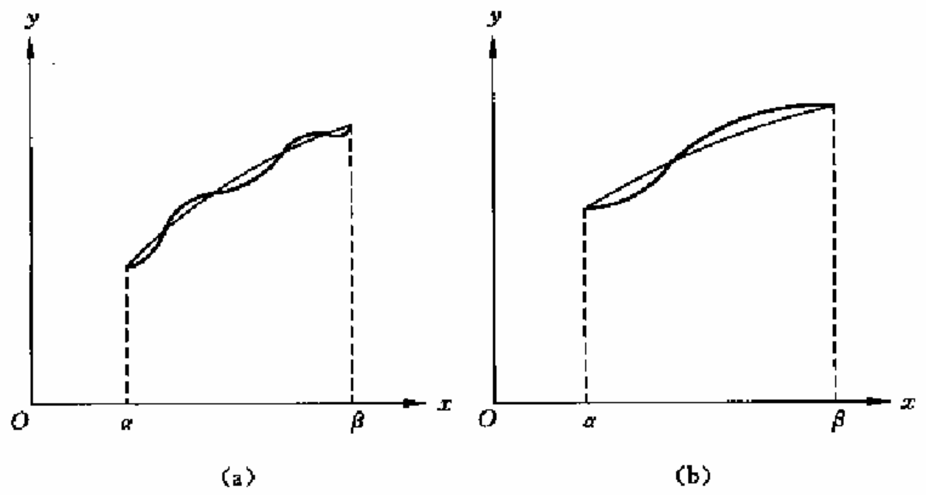
- 给定函数$y(x)$
  - 宗量：x
  - 函数：$y(x)$
  - 宗量的增量：Δx
  - 函数的增量：
    - $\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x)$
  - 当两点无限接近：
    - $\Delta x \to dx$，$\Delta y \to dy$
  - 略去高阶微量：
    - $dy = y'(x)dx$
  - 当在x处取得函数极值
    - $dy = 0$

- 给定泛函 $\Pi(y)$
  - 宗量：y
  - 泛函：$\Pi(y)$
  - 函数的变分：δy
  - 泛函的变分：
    - $\delta\Pi = \Pi(y+\delta y) - \Pi(y)$
  - 在计算 $\delta\Pi$时可以展开$\Pi(y+\delta y)$中的被积函数只保留线性项
  - 当在y处取得泛函极值
    - $\delta\Pi = 0$

函数$y(x)$在定义域内与$y(x)+\delta y(x)$处处无限接近

函数曲线的接近度

- 在定义域 $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ 内，给定两条函数曲线$y(x)$和$y_1(x)$
  - 零阶接近度
    - 在每一点处$y(x)$和$y_1(x)$ 纵坐标都很接近； $y(x)-y_1(x)$处处很小
  - 一阶接近度
    - 在每一点处同时$y(x)$和$y_1(x)$ 的斜率也很接近； $y'(x)-y'_1(x)$处处很小
  - 二阶接近度
    - $y''(x)-y''_1(x)$处处很小



函数曲线的接近度

- 当泛函的被积函数是$F(x, y, y')$时，函数y要求有一阶接近度
  - 可取 δy， $\delta y'$都是同级的微分量

- 当泛函的被积函数是$F(x, y, y', y'')$时，函数y要求有二阶接近度
  - 可取 δy， $\delta y'$， $\delta y''$都是同级的微分量

第一类变分问题

- 设函数$y(x)$是下式的极值解

$$\Pi(y)=\int_{\alpha}^{\beta}F(x,y,y')\mathrm{d}x$$

  - 且满足端点条件 $y(\alpha)=\bar{y}_1, y(\beta)=\bar{y}_2$

- 设其邻近的函数$y(x)+\delta y(x)$也满足端点条件
  - 因此端点变分满足

$$\delta y(\alpha)=\delta y(\beta)=0$$

- 泛函的变分为

$$\begin{aligned}\delta\Pi &=\Pi(y+\delta y)-\Pi(y)\\ &=\int_{\alpha}^{\beta}\left\{F(x,y+\delta y,y'+\delta y')-F(x,y,y')\right\}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

内容提要

- 变分命题与一般极值问题
- 泛函的极值问题与欧拉方程，变分法基本定理
- 自然边界问题
- 拉格朗日乘子法

第一类变分问题

- 根据微量计算规则，设$y(x)$和$y(x)+\delta y(x)$是有一阶接近的曲线

$$F(x,y+\delta y,y'+\delta y')=F(x,y,y')+\left[\frac{\partial}{\partial y}F(x,y,y')\right]\delta y+\left[\frac{\partial}{\partial y'}F(x,y,y')\right]\delta y'$$

- 引入简写符号

$$F=F(x,y,y'),F_y=\frac{\partial}{\partial y}F(x,y,y'),F_{y'}=\frac{\partial}{\partial y'}F(x,y,y')$$

- 可得

$$\delta F=F_y\delta y+F_{y'}\delta y'$$

第一类变分问题

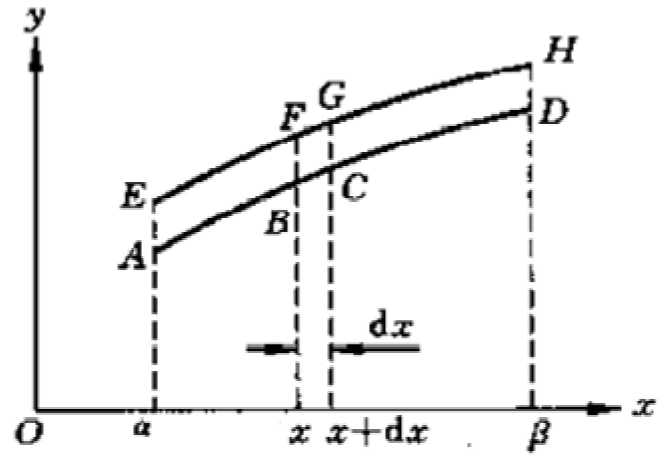
- 泛函的变分为：

$$\boxed{\delta\Pi = \int_{\alpha}^{\beta} \delta F \mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} \left[F_y \delta y + F_{y'} \delta y' \right] \mathrm{d}x}$$

- 下面将证明函数*y*(*x*)的导数的变分等于函数*y*(*x*)的变分的导数，亦即导数和变分两种运算可以互换运算顺序：

$$\boxed{\delta y' = (\delta y)'}$$

第一类变分问题



- 证明 $\delta y' = (\delta y)'$
  - Hint：图中G点纵坐标有计算方法
  - 其一从C点的纵坐标计算

$$y + y'\mathrm{d}x + \delta(y + y'\mathrm{d}x) = y + \delta y + y'\mathrm{d}x + \delta y'\mathrm{d}x$$

  - 其二从F点的纵坐标计算

$$y + \delta y + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y + \delta y)\mathrm{d}x = y + \delta y + y'\mathrm{d}x + (\delta y)'\mathrm{d}x$$

第一类变分问题

- 由上页结论：

$$\delta\Pi = \int_{\alpha}^{\beta} \delta F \mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} \left[F_y \delta y + F_{y'} (\delta y)' \right] \mathrm{d}x$$

- 对等式右边的第二部分进行分部积分有

$$\int_{\alpha}^{\beta} F_{y'} (\delta y)' \mathrm{d}x = -\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (F_{y'}) \delta y \mathrm{d}x + F_{y'} \delta y \,|_{\alpha}^{\beta}$$

- 根据端点约束条件上式第二部分等于0，由此得

$$\delta\Pi = \int_{\alpha}^{\beta} \left[F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} \right] \delta y \mathrm{d}x$$

可进一步简化

变分法基本预备定理

- 如果函数$F(x)$在线段(x_1, x_2)上连续，且对于满足以下一般条件的任意选定的函数 $\delta y(x)$，有

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x)\delta y(x)\mathrm{d}x = 0$$

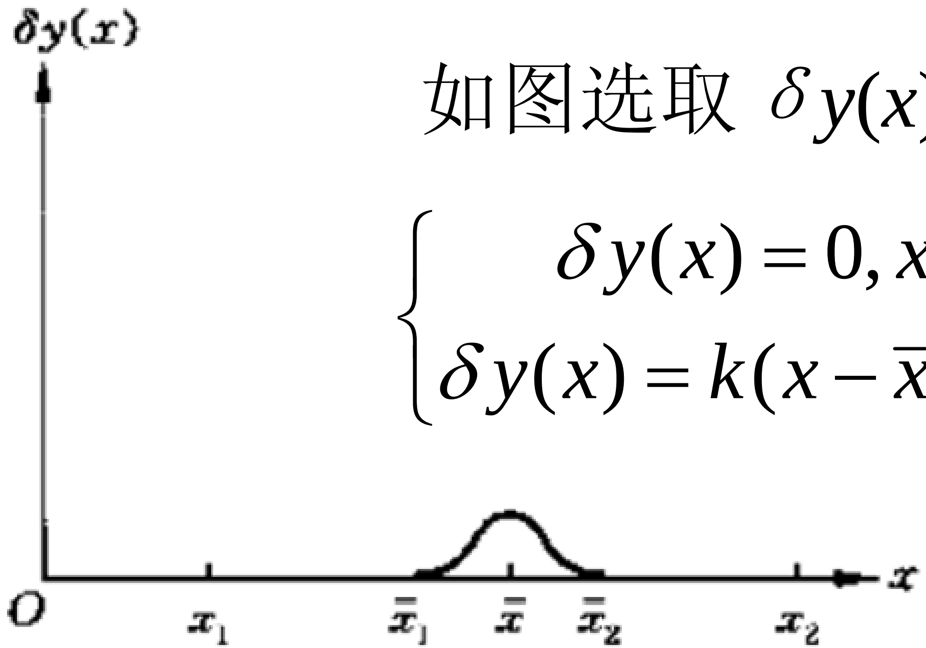
- 则在线段上(x_1, x_2)上

$$F(x) = 0$$

- 变分 $\delta y(x)$的一般条件为：
  - 至少一阶可微；
  - 在线段(x_1, x_2)的端点处；
  - $|\ \delta y(x)| < \varepsilon$ 或$|\ \delta y(x)\ |$及$|\ \delta y'(x)\ | < 0$

变分法基本预备定理

- 证明：采用反证法。假设$F(x)$在点 $x=\bar{x}$ 处不等于零。选取 $x=\bar{x}$ 附近小邻域 $[\bar{x}_1,\bar{x}_2]$ 使得在此区域内$F(x)$不改变正负号。



如图选取 $\delta y(x)$使得

$$\begin{cases} \delta y(x)=0, x_1 \le x \le \bar{x}_1; \bar{x}_2 \le x \le x_2 \\ \delta y(x)=k(x-\bar{x}_1)^{2n}(\bar{x}_2-x)^{2n}, \bar{x}_1 \le x \le \bar{x}_2 \end{cases}$$

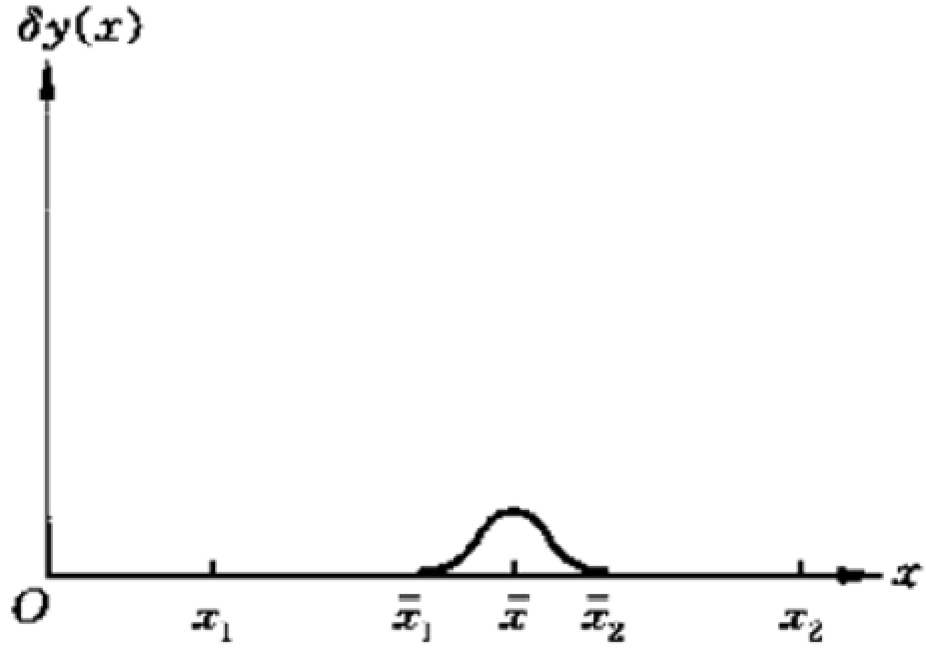
变分法基本预备定理

- 可见构造函数满足所设条件。但是容易验证

$$\int_{x_1}^{x_2} F\delta y(x)\mathrm{d}x = \int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2} F(x)k(x-\bar{x}_1)^{2n}(\bar{x}_2-x)^{2n}\mathrm{d}x \neq 0$$

- 与条件矛盾，所以

$$F(x) \equiv 0$$



- 得证

变分法基本预备定理(多变量版本)

- 如果函数$F(x, y)$在定义域s上连续，设 $\delta z(x, y)$在s域的边界上为零，$|\delta z(x, y)| < \varepsilon$，$|\delta z_x| < \varepsilon$，$|\delta z_y| < \varepsilon$，还满足至少一阶或更高阶可微，且

$$\iint_s F(x, y)\delta z(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

- 则在定义域s上 $F(x, y) = 0$

变分问题的欧拉方程

- 由预备定理可知

$$\boxed{F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} = 0, \alpha \le x \le \beta}$$

- 如果展开 $\dfrac{\mathrm{d}F_{y'}}{\mathrm{d}x}$

$$\boxed{F_y - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} y' - \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x} y'' = 0}$$

- 其中$F(x,y,y')$必须具有二阶偏导数，$y(x)$也必须具有二阶偏导数。

由此把变分问题转化为微分方程求解

变分法求解(1)
最短连线问题

- 其变分极值问题为

$$\delta\Pi=\int_0^{\alpha}\left[1+(y'+\delta y')^2\right]^{1/2}\mathrm{d}x-\int_0^{\alpha}\left[1+y'^2\right]^{1/2}\mathrm{d}x$$

- 略去 δy’的高次微量得

$$\delta\Pi=\int_0^{\alpha}\frac{y'+\delta y'}{\left[1+y'^2\right]^{1/2}}\mathrm{d}x=0$$

- 分部积分，并利用 $\delta y(0)=0$， $\delta y(a)=0$，得

$$\delta\Pi=-\int_0^{\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{y'}{\left(1+y'^2\right)^{1/2}}\right]\delta y\mathrm{d}x=0$$

变分法求解(1)
最短连线问题

- 由变分法预备定理，给出以下微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{y'}{\left(1+y'^2\right)^{1/2}}\right]=0$$

- 积分得

$$\frac{y'}{\left(1+y'^2\right)^{1/2}}\equiv const \quad \Longrightarrow \quad y'\equiv const$$

- 由端点约束条件即得 $y=\dfrac{b}{a}x$

变分法求解(2)
最速降线问题

- 可得泛函的变分为

$$\delta T=\int_0^a \frac{1}{\sqrt{2g(y+\delta y)}}\left[1+(y'+\delta y')^2\right]^{1/2}\mathrm{d}x-\int_0^a \frac{1}{\sqrt{2gy}}\left[1+y'^2\right]^{1/2}\mathrm{d}x$$

- 把 δy， δy’作为微量展开

$$\left[\frac{1+(y'+\delta y')^2}{y+\delta y}\right]^{1/2}=\left(\frac{1+y'^2}{y}\right)^{1/2}+\frac{y'}{[y(1+y'^2]^{1/2}}\delta y'$$

$$-\frac{1}{2y}\left[\frac{1+y'^2}{y}\right]^{1/2}\delta y+O(\delta^2)$$

变分法求解(2)
最速降线问题

- 略去高次微量得

$$\delta T=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^a\left\{\frac{y'}{\left[y(1+y'^2)\right]^{1/2}}\delta y'-\frac{1}{2y}\left[\frac{1+y'^2}{y}\right]^{1/2}\delta y\right\}\mathrm{d}x=0$$

- 进行分部积分，并利用边界条件

$$\delta T=-\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^a\left\{\frac{1}{2y}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}}\right]\right\}\delta y\mathrm{d}x=0$$

变分法求解(2)
最速降线问题

- 由变分法预备定理，给出以下微分方程

$$\frac{1}{2y}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}}\right]=0$$

- 该方程可改写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\frac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}}-\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}\right\}=0$$

- 进一步化简得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}}\right\}=0$$

变分法求解(2)
最速降线问题

- 两边积分可得

$$y(1+y'^2)=C$$

- 进一步做变量代换，令$y'=\cot t$ 有

$$y=\frac{C}{1+y'^2}=C\sin^2 t=\frac{C}{2}(1-\cos 2t)$$

- 而

$$\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}y}{y'}=\frac{2C\sin t\cos t\mathrm{d}t}{\cot t}=2C\sin^2 t\mathrm{d}t=C(1-\cos 2t)\mathrm{d}t$$

- 积分可得

$$x=\frac{C}{2}(2t-\sin 2t)+C_1$$

变分法求解(2)
最速降线问题

- 代入端点条件 $y(0)=0$， $x(0)=0$，则得$C_1=0$.
- 再做变量代换 $\theta = 2t$
- 可解得最速降线的参数表示

$$\begin{cases} x = \dfrac{C}{2}(\theta - \sin\theta) \\ y = \dfrac{C}{2}(1-\cos\theta) \end{cases}$$

- 这是一组摆线（圆滚线）簇，以$C/2$为滚圆半径，常数C是由圆滚线通过点$P(x_1,x_2)$这个条件来决定。因此，摆线就是最速降线。

泛函变分问题的一般求解步骤

1. 从物理上建立泛函及其条件
2. 通过泛函变分，利用变分法基本预备定理求得欧拉方程
3. 在边界条件下求解欧拉方程，即微分方程求解

变分法与欧拉方程

- 变分法与欧拉方程代表同一物理问题
- 欧拉方程求解和从变分法求数值近似解（如有限元，利兹法，伽辽金法等），其效果一样

- 欧拉方程求解很困难，但从泛函求近似解通常很方便，因而变分法一直被广为重视。
- 但并不是所有的微分方程都能找到相对应的泛函问题。

更多例子

- 弦的微小横振动—波动方程
- 平衡膜—泊松方程

内容提要

- 变分命题与一般极值问题
- 泛函的极值问题与欧拉方程，变分法基本定理
- 自然边界问题
- 拉格朗日乘子法

自然边界问题

- 上一节研究了函数两端的值都是已知的问题，即带端点条件的变分约束问题。
- 在一些问题中，端点处没有位置约束条件。但在极值曲线上必然还有需要自然服从的端点条件，这类端点条件被通称为(natural boundary condition)

改进的最速降线问题

设物体开始从(0, 0)点下滑，其滑线的右下端$x=a$处没有规定$y(a)$的端点值，而只是规定线的下端延伸到$x=a$位置，问耗时最短的曲线是怎样的？

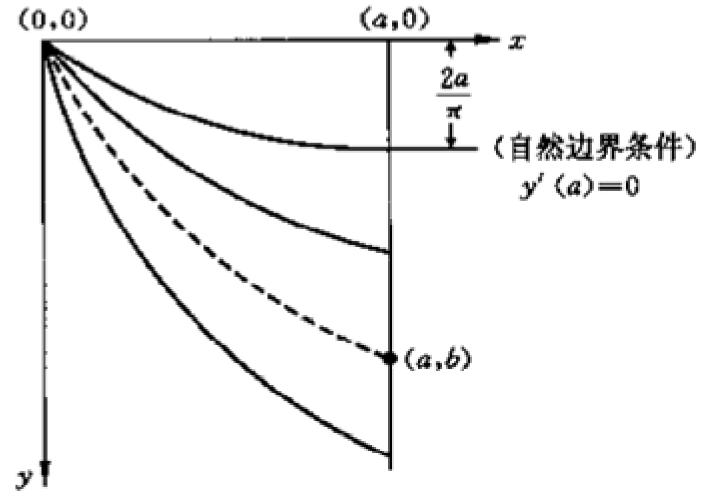


图 4.6 虚线代表从(0, 0)到(a, b)的最速降线，实线代表从(0, 0)到$x=a$的各种可能的最速降线，只用$y(0)=0$不足以决定哪一条曲线是最速降线

第三类变分命题

- 被积函数包括一阶导数，左端自由的变分命题在一切既满足左端的约束条件

$$y(\alpha) = \overline{y}_1$$

- 右端$x=\beta$处自由，而且又足够光滑的函数$y(x)$中，求使下列泛函为极值的$y(x)$的解

$$\Pi(y) = \int_{\alpha}^{\beta} F(x, y, y')\mathrm{d}x$$

自然边界问题

- 采用前面类似的变分过程可得

$$\delta\Pi = \int_\alpha^\beta \left[F_y \delta y + F_{y'} \delta y' \right] \mathrm{d}x$$

- 通过分部积分

$$\int_\alpha^\beta F_{y'} \delta y' \mathrm{d}x = -\int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}F_{y'}}{\mathrm{d}x} \delta y \mathrm{d}x + F_{y'}\big(\beta, y(\beta), y'(\beta)\big)\delta y(\beta)$$

$$-F_{y'}\big(\alpha, y(\alpha), y'(\alpha)\big)\delta y(\alpha)$$

- 根据约束条件 $y(\alpha) = \overline{y}_1$ 可知 $\delta y(\alpha) = 0$上式可简化为

$$\int_\alpha^\beta F_{y'} \delta y' \mathrm{d}x = -\int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}F_{y'}}{\mathrm{d}x} \delta y \mathrm{d}x + F_{y'}\big(\beta, y(\beta), y'(\beta)\big)\delta y(\beta)$$

自然边界问题

- 求得变分极值条件为

$$\delta\Pi = -\int_{\alpha}^{\beta}[F_y - \frac{\mathrm{d}F_{y'}}{\mathrm{d}x}]\delta y\mathrm{d}x + F_{y'}\big(\beta, y(\beta), y'(\beta)\big)\delta y(\beta)$$
$$= 0$$

- 但是定义域右端 β 处未被约束，因此 $\delta y(\beta)$ 未必等于0。但区间内部与端点处的变分都独立，所以可导出以下式子

$$\boxed{\begin{cases} F_y - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} = 0, \alpha \le x < \beta \\ F_{y'}(\beta, y(\beta), y'(\beta)) = 0 \end{cases}}$$

自然边界问题：改进的最速降线问题求解

- 被积函数 $F=\left[\dfrac{1+y'^2}{2gy}\right]^{1/2}$
- 因此有 $F_{y'}=[2gy]^{-1/2}\dfrac{y'}{\left(1+y'^2\right)^{1/2}}$
- 同时 $F_{y'}(a,y(a),y'(a))=0$
- 相当于自然端点条件是 $y'(a)=0$

$$y'=\cot t\Rightarrow\quad \theta=2t=\pi$$

自然边界问题：
改进的最速降线问题求解

- 带入端点条件即可求得待定系数

$$C = \frac{2\alpha}{\pi - \sin\pi} = \frac{2\alpha}{\pi}$$

- 因此改进的最速降线问题解是：

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{a}{\pi}(\theta - \sin\theta) \\ y &= \frac{a}{\pi}(1 - \cos\theta) \end{aligned}\right\} 0 \le \theta \le \pi$$

自然边界问题

- 两端都自由的情况

$$\boxed{\begin{cases} F_y - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y'} = 0, \alpha < x < \beta \\ F_{y'}(\alpha, y(\alpha), y'(\alpha)) = 0 \\ F_{y'}(\beta, y(\beta), y'(\beta)) = 0 \end{cases}}$$

内容提要

- 变分命题与一般极值问题
- 泛函的极值问题与欧拉方程，变分法基本定理
- 自然边界问题
- 拉格朗日乘子法

函数极值与拉格朗日乘子法

- 1776年，年轻的拉格朗日（19岁）提出了拉氏乘子法，用以解决带约束条件的极值问题。

极大、极小的定义

- 如果$f(x)$在x=x_0处满足

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)<0,\ \text{and}\ 0<|\Delta x|<\varepsilon$$

  - 则称$f(x)$在 $x=x_0$ 处有一相对极大或局部极大，其中 ε 是一正的微小量

- 如果$f(x)$在x=x_0处满足

$$f(x)-f(x_0)\le 0,\ \text{and}\ a<x,x_0<b$$

  - 则称$f(x)$在 $[a, b\,]$ 中有一绝对极大或全域极大，其中 ε 是一正的微小量

极大极小的充要条件

- $f'(x_0)=0$是在$x=x_0$取得极值的必要条件，而非充分条件

- 相对极小的必要条件是$f'(x_0)=0$，而其充要条件$f'(x_0)=0$，$f''(x_0)>0$
- 相对极大的必要条件是$f'(x_0)=0$，而其充要条件$f'(x_0)=0$，$f''(x_0)<0$

- 如果$f''(x_0)=0$，通过判断$f'''(x_0)$的符号。$f'(x_0)=f''(x_0)=0$，且$f'''(x_0)\neq 0$时，成为一个拐点。

极大极小相关概念

- 极点(extremum)：极大，极小
- 驻点(stationary points)：极大，极小，拐点
  - 驻点上的函数值成为驻值

- 利用泰勒展开同样可分析出高维函数极值的充要条件

带约束的极值问题

- 以二维情况为例：研究函数$f(x_1,x_2)$在(x_1,x_2)受约束条件$g(x_1,x_2)=0$的限制下的极值问题
  - 几何解释：$f(x_1,x_2)$表示地图上的海拔高度，$g(x_1,x_2)=0$表示了一条公路（曲线）所经过的各点
  - 因为有约束，直接的导数求解无法获得正确的解

带约束的极值问题

- 以二维情况为例：研究函数$f(x_1,x_2)$在(x_1,x_2)受约束条件$g(x_1,x_2)=0$的限制下的极值问题

- 解法步骤：
  - 求解$g(x_1,x_2)=0$将变量x_1看成x_2的函数$x_1=h(x_2)$
  - 带入得$f=f(h(x_2),x_2)$，变成单一变量的函数，其极值条件是

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x_2}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}x_2}+\frac{\partial f}{\partial x_2}=0$$

带约束的极值问题

- 对$g(x_1,x_2)=0$求微分得

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}x_2}+\frac{\partial g}{\partial x_2}=0$$

- 采用上两式，消去 $\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}x_2}$ 可得

$$-\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(\frac{\dfrac{\partial g}{\partial x_2}}{\dfrac{\partial g}{\partial x_1}}\right)+\frac{\partial g}{\partial x_2}=0 \qquad \frac{\partial g}{\partial x_1}\neq 0$$

带约束的极值问题

$$g(x_1, x_2) = 0$$

$$-\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(\frac{\dfrac{\partial g}{\partial x_2}}{\dfrac{\partial g}{\partial x_1}}\right)+\frac{\partial g}{\partial x_2}=0 \qquad \frac{\partial g}{\partial x_1}\neq 0$$

带约束的极值问题

- 以几何的角度解释，存在两种情况

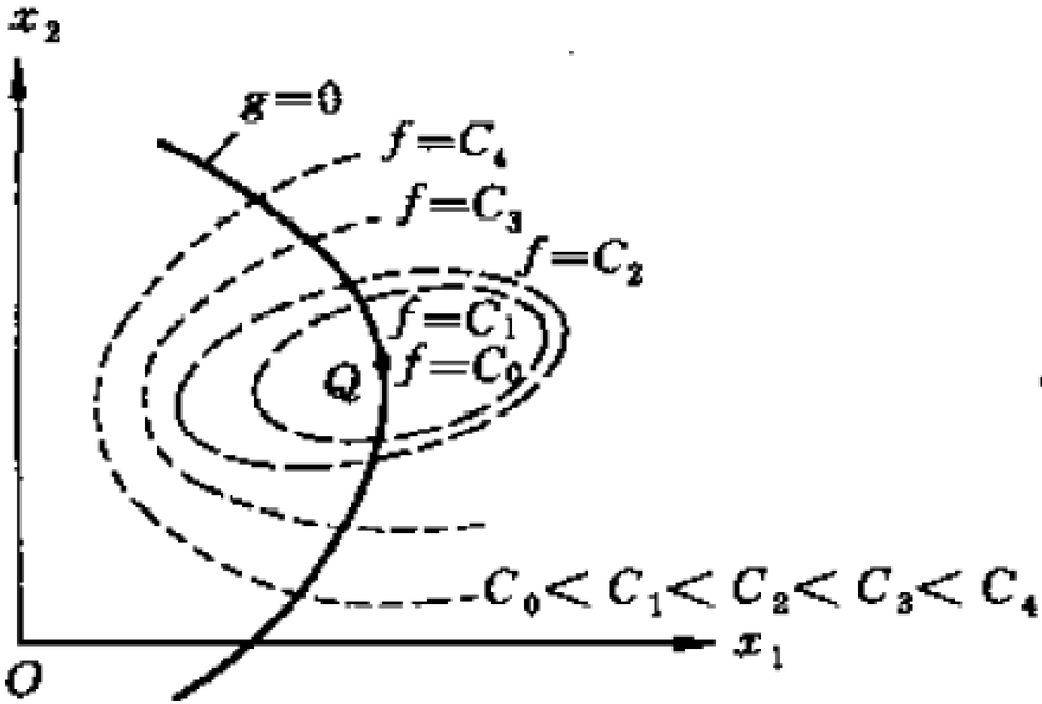


图 4.7　$f = C_0$ 的极小点恰好在 $g = 0$ 的曲线上

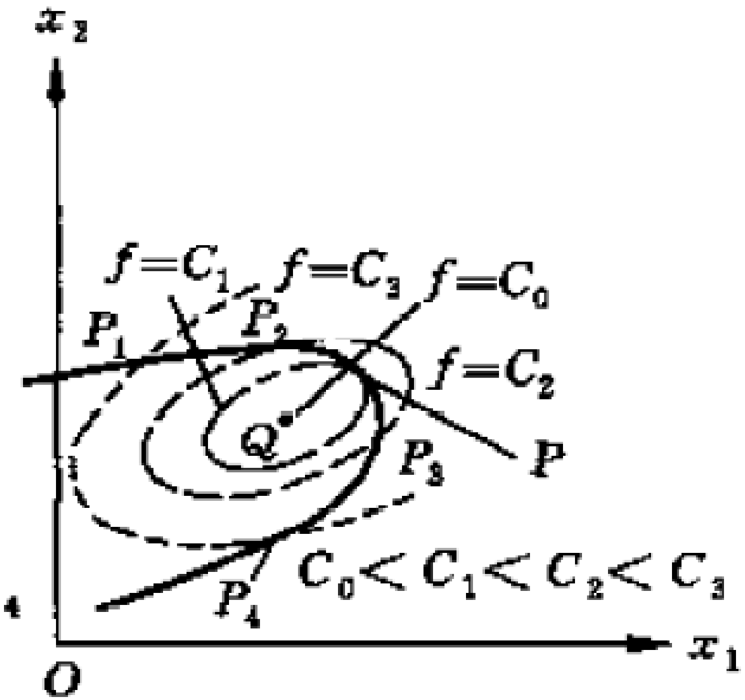
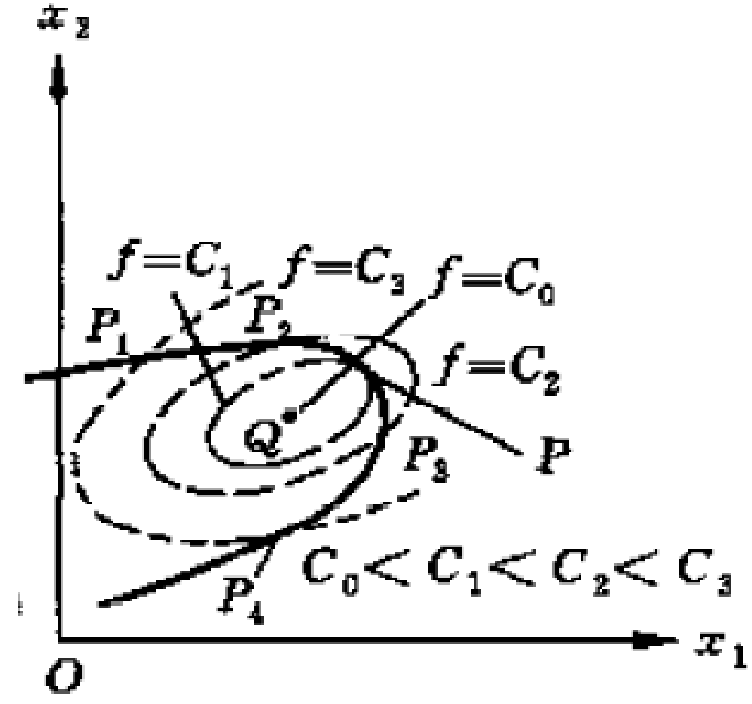


图 4.8　$g = 0$ 曲线和 $f = C_1$ 切于 $P(x_1^{(P)}, x_2^{(P)})$

带约束的极值问题

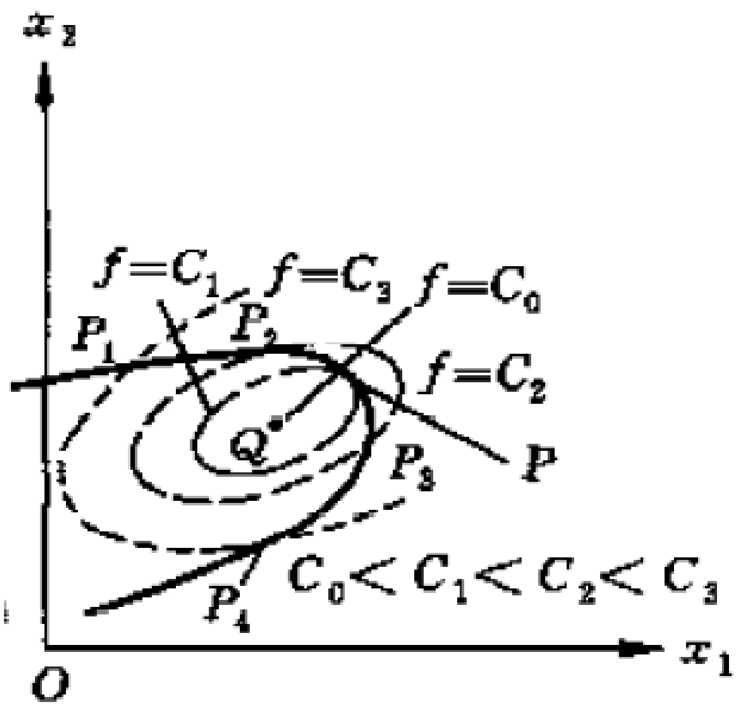
- 曲线$g(x_1,x_2)=0$不通过 f 的极小点Q，但和曲线$f=C_1$相切于P点，则P点为$g(x_1,x_2)=0$上 f 值最小点。



带约束的极值问题

- 曲线$f=C_1$在P点的法矢量和曲线$g(x_1,x_2)=0$在P点的法矢量平行，即：

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x^P)}{\dfrac{\partial g}{\partial x_1}(x^P)}=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x^P)}{\dfrac{\partial g}{\partial x_2}(x^P)}=-\lambda$$



- 其中 λ 是待定系数

带约束的极值问题

- 与$g(x_1,x_2)=0$一起有三个方程求解三个未知数$x_1^P\, x_2^P$和 λ，这样就求得了带约束的极值问题解

- 一般化（化有约束为无约束）

$$F(x_1,x_2,\lambda)=f(x_1,x_2)+\Phi(g)$$

- 且满足 $g\to 0,\ \Phi(g)\to 0$ ，考虑 $\Phi(g)$ 泰勒展开

$$\Phi(g)=\lambda g(x_1,x_2)+\frac{1}{2}\lambda_1 g^2+\cdots \quad \to \quad \Phi(g)\simeq\lambda g(x_1,x_2)$$

$g(x_1,x_2)$很小时，即在$g(x_1,x_2)=0$附近

带约束的极值问题

- 由此目标函数可改写为

$$F(x_1,x_2,\lambda)=f(x_1,x_2)+\lambda g(x_1,x_2)$$

- 驻值条件为

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}=0,\frac{\partial F}{\partial x_2}=0,\frac{\partial F}{\partial \lambda}=0$$

参考文献

- 钱伟长，格林函数和变分法在电磁场和电磁波计算中的应用，上海大学出版社

下节课内容?