

光滑表面上的 G^1 插值曲线

蔺宏伟 王国瑾

(浙江大学图像图形研究所 杭州 310027)

(浙江大学 CAD & CG 国家重点实验室 杭州 310027)

摘 要 在计算机图形学和计算机辅助几何设计中,限制在光滑曲面上保持几何连续的曲线插值技术显现出越来越重要的作用.文中用直纹面投影的思想研究了这一问题,给出了一种在光滑曲面上保持 G^1 连续的样条曲线插值技术.首先构造一条插值曲面上已知点列的空间3次 Bézier 样条曲线,然后通过一张直纹面将这条空间插值曲线投影到已知曲面上,即可得到限制在已知光滑表面上的 G^1 插值曲线.理论推导和实例显示表明,该技术具有推广应用的广阔前景.

关键词 插值;曲面;样条曲线

中图法分类号 TP391

G^1 Continuous Interpolation Curve on Smooth Surface

Lin Hongwei Wang Guojin

(Institute of Images and Graphics, Zhejiang University, Hangzhou 310027)

(State Key Laboratory of CAD & CG, Zhejiang University, Hangzhou 310027)

Abstract In computer graphics and computer aided geometric design, the techniques of generating an interpolation curve that is restricted on a given smooth surface and holds geometric continuity have shown more and more wide applications. We propose an approach of constructing Bézier spline curve of degree 3 to interpolate the given points on the smooth surface and then project the curve onto this surface with ruled surface. The projected curve keeps G^1 continuity. Theoretical deduction and experimentation show that such an approach is effective and produces good results.

Key words interpolation; surface; spline curve

1 引 言

给定空间中(平面上)的一系列点,求一条通过这些点的空间(平面)曲线.这是一个历史悠久的经典插值问题.随着计算机图形学理论的发展以及计算机辅助设计应用范围的扩大,限制在光滑表面上的曲线插值问题,即给定某光滑表面上的一系列点,求这个曲面上一条通过这些点,并且具有一定连续性的曲线的算法,已经显现出越来越重要的作用.例如,在计算机图形学中,为了在实体模型的表面画一个几何图案,可以先在模型表面上确定一些点,然

后过这些点构造一条位于模型表面上的曲线作为几何图案的轮廓线,最后画出模型表面上的几何图案.在计算机动画中,关键帧内模型的旋转状态可以通过四元数映射到单位球面上的点^[1-2].因而,这些模型的旋转状态之间的插值可以通过在球面上构造一条插值这些点的曲线来实现.此外,在数控加工的刀具路径设计^[3-4]、机器人路径设计^[5]、公路铁路设计、曲面裁剪^[6]等工业应用中,也大量存在着类似的问题.

近年来,国内外一些学者研究了上述问题. Shoemake 通过对四元数的插值,实现了球面上的曲线插值问题^[1].1994年,张怀研究了球面上曲线的

原稿收到日期:2002-08-28;修改稿收到日期:2002-10-24. 本课题得到国家自然科学基金(60173034)和国家重点基础研究“九七三”项目(2002CB312101)资助. 蔺宏伟,男,1973年生,博士研究生,主要研究方向为计算机图形学、计算机辅助几何设计、逆向工程等. 王国瑾,男,1944年生,教授,博士生导师,主要研究方向为计算机辅助几何设计、计算机图像图形、应用逼近论.

插值问题,他用大圆弧代替直线,将欧氏空间中的 Bézier 样条插值方法推广到球面上来构造插值曲线^[7].但这两种方法难以推广到一般光滑曲面上的插值.1997 年,张怀又研究了限制在光滑曲面上的 C^1 曲线插值方法^[8].对于曲面 S ,该方法通过构造 $D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,且像为 S 的合适映射,从而将曲面 S 上的曲线插值问题转化为通常的 $\mathbb{R}^2$ 上的曲线插值问题.但这种方法仅适用于可参数化的曲面,并且计算量比较大.

由于在计算机辅助几何设计中,几何连续性的概念和应用已经远远超过了代数连续性,因此研究光滑曲面上几何连续的曲线插值的算法,其重要性和迫切性是不言而喻的.但迄今为止,有关论文甚为罕见.在本文中,我们提出了直纹面投影的新思路,给出一种限制在光滑曲面上能保持 G^1 连续的样条曲线插值的新方法,收到了相当好的效果.

2 插值方法的导出

本文所要解决的问题可以这样来叙述:给定一张空间光滑曲面 S ,再给定 S 上一个点列 $\{P_i \in S | i = 0, 1, \dots, n\}$,以及位于曲面 S 在点 P_i 处的切平面上的相应于点 P_i 的单位矢量 $T_i, i = 0, 1, \dots, n$,要求构造曲面 S 上的一条 G^1 连续的曲线,使其通过给定点列,并且在每一给定点 P_i 处,曲线的单位切矢量为 T_i .我们将这样的插值曲线称为曲面上的插值曲线.

我们的做法是,首先在空间 $\mathbb{R}^3$ 中构造一条插值给定点列的 G^1 连续的 3 次 Bézier 样条曲线,然后通过一张直纹面将这条曲线投影到给定的光滑曲面上.可以证明,这样得到的曲线即为保持 G^1 连续的曲面上的插值曲线.

2.1 保持 G^1 连续的空间 Bézier 样条插值曲线

给定空间点列 $\{P_i = (x_i, y_i, z_i) | i = 0, 1, \dots, n\}$,再相应地给定每点处的单位切矢量 $T_i, i = 0, 1, \dots, n$.令

$$\Delta_i = \|P_{i+1} - P_i\|, i = 0, 1, \dots, n-1;$$

$$t_0 = 0, t_i = \sum_{j=1}^i \Delta_j, i = 1, 2, \dots, n-1;$$

$$l = \sum_{j=0}^{n-1} \Delta_j.$$

累加弦长 $t_i (i = 0, 1, \dots, n-1)$ 将作为样条曲线的参数.为得到插值两点 $P_i, P_{i+1} (i = 0, 1, \dots, n-1)$ 的各段 3 次 Bézier 曲线,设两点 P_i, P_{i+1} 之间

的距离为 d ,光滑曲面 S 在点 P_i, P_{i+1} 的切平面的交线为 L ,曲面 S 在点 P_i 以向量 T_i 为方向向量的切线与直线 L 的交点为 $I_{i,1}$,在点 P_{i+1} 以向量 T_{i+1} 为方向向量的切线与直线 L 的交点为 $I_{i,2}$.点 P_i 与点 $I_{i,1}$ 之间的距离为 $d_{i,1}$,点 P_{i+1} 与点 $I_{i,2}$ 之间的距离为 $d_{i,2}$.如果曲面 S 在点 P_i, P_{i+1} 的两张切平面没有交线;或者曲面 S 在点 P_i, P_{i+1} 以向量 T_i, T_{i+1} 为方向向量的切线与两张切平面的交线 L 没有交点,则相应的距离值 $d_{i,1}$ 或 $d_{i,2}$ 取为 $\frac{1}{3}d$.如图 1 所示,若控制多边形 $P_i Q_i R_i P_{i+1}$ 的首末边长分别超过了 $d_{i,1}$ 和 $d_{i,2}$,则其所对应的 Bézier 曲线会出现扭曲.为了防止所得到的曲线扭曲,作辅助点

$$\begin{cases} Q_i = P_i + \min(\frac{1}{3}d, d_{i,1})T_i \\ R_i = P_{i+1} - \min(\frac{1}{3}d, d_{i,2})T_{i+1} \end{cases}$$

$$i = 0, 1, \dots, n-1,$$

再以 $\{P_i, Q_i, R_i, P_{i+1}\}$ 为控制顶点, $[t_i, t_{i+1}]$ 为参数区间,作 3 次 Bézier 曲线

$$W_i(u) = P_i B_0^3(u) + Q_i B_1^3(u) + R_i B_2^3(u) + P_{i+1} B_3^3(u), u \in [0, 1]$$

其中, $u = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}, B_j^3 = \binom{3}{j} u^j (1-u)^{3-j}, j = 0, 1, 2, 3$.

将这样的 n 段曲线拼接起来,就构成一条 3 次 Bézier 样条曲线 $W(u(t)), u \in [0, l]$,我们称之为空间插值曲线.显然,这条样条曲线是 G^1 连续的.

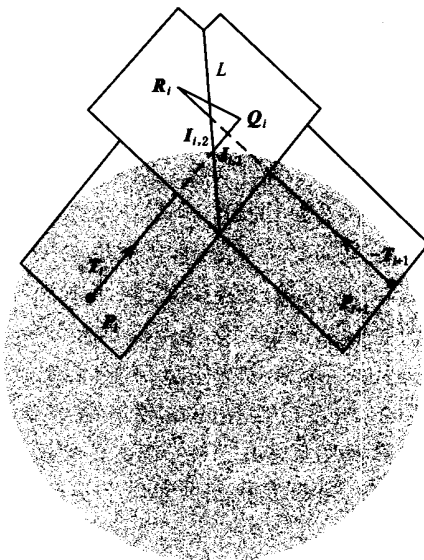


图 1 控制多边形的首末边边长

2.2 保持 G^1 连续的曲面上的插值曲线

下面先叙述对于曲面上插值曲线的直纹面投影算法(Ruled Surface Projecting Algorithm, RSPA),然后在第 2.3 节证明用该算法构造的插值曲线是 G^1 连续的.

算法 1. RSPA

- Step1. W_1 = 插值点列中的第一个点;
 Step2. while W_1 不是插值点列中的最后一个点;
 Step3. W_2 = 插值点列中与 W_1 相邻的下一个点;
 Step4. 按照第 2.1 节的方法,构造插值这两点和给定矢量的空间 3 次 Bézier 样条曲线 C ;
 Step5. //确定直纹面
 Step6. If 样条曲线 C 与给定曲面 S 有异于 W_1 和 W_2 的交点;
 Step7. 将这些交点顺序插入点 W_1 和 W_2 之间,构成有序点列 α ;
 Step8. For 点列 α 中每两个相邻点
 Step9. 构造两点之间的直纹面;
 Step10. //求曲线上的插值曲线
 Step11. 求直纹面与曲面 S 的交线 L ;
 Step12. If L 上存在直纹面上的非正则点,或者存在使直纹面和曲面的法向平行的点;
 Step13. 将它们顺序插入点 W_1 和 W_2 之间,构成新的插值点列,返回 Step2;
 Step14. Else
 Step15. 输出交线 L 作为曲线上的插值曲线;
 Step16. W_1 = 插值点列中与 W_1 相邻的下一个点,返回 Step2;

这里我们必须着重指出,如果上述直纹面与曲面 S 的交线 L 上存在直纹面上的非正则点,或者存在直纹面和曲面的法向平行的点,就将这些点作为插值点顺次插入点 W_1 和 W_2 之间,构成新的插值点列. 这时,在这些新的插值点处给定的切矢量是以这些点为起点,以插值点列中相邻的下一个点为末点的向量,正交投影到曲面 S 在这点的切平面上所得到的投影向量.

算法 1 首先用第 2.1 节中的方法,得到一条空间三次 Bézier 样条插值曲线 $W(u(t)), t \in [0, l]$. 其中,插值点 P_i 和 P_{i+1} 之间的一段 Bézier 曲线为 $W_i(u(t)), t \in [t_i, t_{i+1}], i = 0, 1, \dots, n-1$. 接着,构造一系列直纹面

$$\begin{aligned} R^i(u(t), s) &= W_i(u(t)) + sN_i(t), \\ t_i &\leq t \leq t_{i+1}, -1 \leq s \leq 0, \\ i &= 0, 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (1)$$

适当地选择直纹面的直母线的方向向量 $N_i(t)$ (选择方法于本节后面详述),将可以保证由这样 n 张

直纹面拼接构成的直纹面 $R(u(t), s), 0 \leq t \leq l, -1 \leq s \leq 0$, 与已知光滑曲面 S 的交线是 G^0 连续的,并且可以证明它还是 G^1 连续的. 这种构造方法的几何意义,就是将空间插值曲线 $W(u(t)), t \in [0, l]$, 投影到光滑曲面 S 上,以投影所产生的曲线作为曲线上的插值曲线,如图 2 所示.

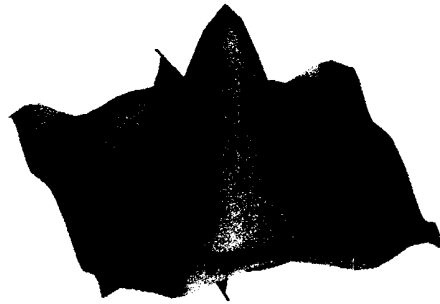


图 2 一张曲面及与之相交的直纹面

下面详细说明式(1)表示的直纹面的直母线的方向向量的取法.

首先,求出给定的光滑曲面 S 与 S 上在点 $P_i, P_{i+1} (i = 0, 1, \dots, n-1)$ 之间一段空间三次 Bézier 插值曲线 $W_i(u(t)), t \in [t_i, t_{i+1}]$ 的交点,设有 $m+1$ 个交点 $I_j^i, j = 0, 1, \dots, m$, 其中 $I_0^i = P_i, I_m^i = P_{i+1}$, 它们对应的参数分别为 $t_j^i, j = 0, 1, \dots, m$, $t_0^i = t_i, t_m^i = t_{i+1}$. 这 $m+1$ 个交点将曲线 $W_i(u(t)) (t \in [t_i, t_{i+1}])$ 分成 m 条子曲线 $C_j^i, j = 0, 1, \dots, m-1$, 这 m 条子曲线中的每一条都完全位于曲面的一侧,如图 3 所示.

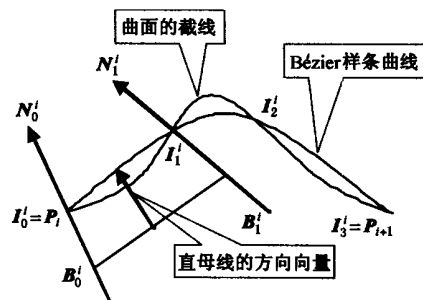


图 3 确定直母线的方向向量

子曲线 $C_j^i, j \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ 的两个端点为 I_j^i 和 I_{j+1}^i , 对应的参数为 t_j^i 和 t_{j+1}^i , 假设两端点之间的距离为 u_j , 曲面 S 在这两点处的单位法向量分别为 N_j^i 和 N_{j+1}^i . 子曲线 C_j^i 位于曲面 S 的一侧, 分别确定曲面 S 在点 I_j^i 及 I_{j+1}^i 处的法线上位于曲面 S 另一侧的一点, 记为 B_j^i 和 B_{j+1}^i . 连接点 B_j^i 和 B_{j+1}^i 得

到线段

$$L_j^i(t) = B_j^i + \frac{t - t_j^i}{t_{j+1}^i - t_j^i} (B_{j+1}^i - B_j^i),$$

$$t_j^i \leq t \leq t_{j+1}^i;$$

则得到以子曲线 C_j^i 为基线的直纹面的直母线的方向向量(如图 3 所示)

$$N_j^i(t) = W(u(t)) - L_j^i(t), \quad t_j^i \leq t \leq t_{j+1}^i.$$

于是,以子曲线 C_j^i 为基线的直纹面为

$$R_j^i(t, s) = W(u(t)) + sN_j^i(t), \quad (2)$$

其中, $t_j^i \leq t \leq t_{j+1}^i, -1 \leq s \leq 0$. 由于 $R_j^i(t, -1)$ 和 $R_j^i(t, 0)$ 分别位于曲面 S 的两侧, 所以式(2)所示的直纹面与曲面 S 一定有交线. 同理, 可以得到其他子曲线所对应的直纹面. 把这样的 m 张直纹面拼接起来, 就得到以光滑曲面 S 在插值点 $P_i, P_{i+1} (i=0, 1, \dots, n-1)$ 之间的每一段空间 3 次 Bézier 插值曲线 $W_i(u(t)) (t \in [t_i, t_{i+1}])$ 为基线的直纹面 $R^i(t, s), t_i \leq t \leq t_{i+1}, -1 \leq s \leq 0$. 进一步, 再把这样的 n 张直纹面 $R^i(t, s), i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ 拼接起来, 就得到以空间 3 次 Bézier 插值曲线 $W(u(t)), t \in [0, l]$ 为基线的直纹面 $R(u(t), s), 0 \leq t \leq l, -1 \leq s \leq 0$, 它与曲面 S 的交线就是所求的 G^1 连续的曲面 S 上的插值曲线.

2.3 曲面上插值曲线的 G^1 连续性

下面先证明由算法 1 得到的、以插值点 $P_i, P_{i+1} (i=0, 1, \dots, n-1)$ 之间的一段空间 3 次 Bézier 插值曲线为基线的直纹面, 与曲面 S 的交线是 G^1 连续的; 然后再证明由这样 n 张直纹面所拼接起来的直纹面, 与曲面 S 的交线就是所求的曲面 S 上 G^1 连续的插值曲线. 为此, 首先证明一个引理.

引理 1. 如果两张光滑曲面在它们的交线上每一点处的法向不平行, 那么, 它们的交线是 G^1 连续的. 并且交线上任一点处切线就是这两张曲面在这点处切平面的交线.

证明. 设 S_1, S_2 为两张光滑曲面, C 为它们的交线, 点 P 为交线 C 上任意一点, 曲面 S_1 和 S_2 在点 P 处的单位法向量为 n_1, n_2 , 切平面为 M_1 和 M_2 . 于是交线 C 在点 P 处的单位切向量为 $n_1 \times n_2$, 由条件可知, 它是非零向量. 由于曲面 S_1 和 S_2 光滑, 所以 n_1 和 n_2 连续, 从而 $n_1 \times n_2$ 连续, 即交线 C 是 G^1 连续的. 交线 C 在点 P 的切线既属于 M_1 , 又属于 M_2 , 所以, 它是 M_1 与 M_2 的交线. 证毕.

现在假设由算法 1 得到的曲面上的插值曲线为 C , 它的插值点列为 $\{P_i | i=0, 1, \dots, n\}$, 插值点处

给定的切矢量为 $\{T_i | i=0, 1, \dots, n\}$.

定理 1. 插值曲面上一个点列中任意两个相邻插值点之间的一段曲面上的插值曲线是 G^1 连续的.

证明. 由第 2.2 节中的作法, 这样的一段曲面上的插值曲线由 m 段子曲线组成. 由算法 1 可知, 每一段子曲线内的每一点都是相应直纹面上的正则点, 并且直纹面在每一点处的法向与给定的曲面 S 在这点的法向不平行. 由引理 1 可知, 这每一段子曲线是 G^1 连续的. 又由于两条相邻子曲线的交点既是前一条子曲线的终点, 又是后一条子曲线的起点, 前后两条子曲线在这一点处的切矢量方向一致, 所以曲面上这段插值曲线在两条相邻子曲线的交点处也是 G^1 连续的. 总之, 任意两个相邻插值点之间的一段曲面上的插值曲线是 G^1 连续的. 证毕.

定理 2. 由算法 1 得到的曲面上的插值曲线 C 是 G^1 连续的, 并且在插值点处以给定的矢量作为切矢量.

证明. 由算法 1 可知, 曲面上的插值曲线 C 是由 n 段曲线 $C_i, i=0, 1, \dots, n-1$ 组成的, 第 i 段曲线 C_i 的首末端点分别为 P_i, P_{i+1} . 定理 1 表明曲线 C_i 是 G^1 连续的. 因此, 要证明 C 是 G^1 连续的, 仅需证明 C 在插值点 $P_i, i=0, 1, \dots, n$ 是 G^1 连续的.

下面证明曲线 C_i 在它的末端点 P_{i+1} 处的切线是方向向量为 T_{i+1} 的直线. 由于向量 T_{i+1} 是光滑曲面 S 在点 P_{i+1} 处的切向量, 因而过点 P_{i+1} 且以向量 T_{i+1} 为方向向量的直线 L 必位于曲面 S 在点 P_{i+1} 处的切平面上. 其次, 因为向量 T_{i+1} 是 Bézier 曲线 $W_i(u(t))$ 在点 P_{i+1} 处的切向量, 所以直线 L 就是曲线 $W_i(u(t))$ 在点 P_{i+1} 处的切线. 但由于 Bézier 曲线 $W_i(u(t))$ 是直纹面 $R^i(t, s)$ 的基线. 于是, 由于直线 L 是直纹面上一条曲线 $W_i(u(t))$ 在点 P_{i+1} 处的切线, 直线 L 也位于这张直纹面在点 P_{i+1} 处的切平面上. 综上所述, 直线 L 就是曲面 S 与直纹面 $R^i(t, s)$ 在点 P_{i+1} 处的两张切平面的交线, 即曲线 C_i 在点 P_{i+1} 处的切线. 同理可证, 曲线 C_{i+1} 首端点 P_{i+1} 处的切线也是直线 L . 于是, 曲面上的插值曲线与相应的空间插值曲线在每个插值点有相同的切线, 即此两条插值曲线在插值点相切. 又按照相应的直纹面的取法, 可知它们在插值点必有相同的切向量. 换言之, 曲面上的插值曲线 C 在插值点 P_i 的切向量恰为给定的矢量 $T_i, i=0, 1, \dots, n$. 因而它在插值点 $P_i, i=0, 1, \dots, n$ 是 G^1 连续的. 证毕.

3 算法的实现及结果

第2节给出了构造曲面上 G^1 连续的插值曲线的一个方法,并且证明了这个方法的正确性.下面将提出并解决算法实现中的几个问题,然后给出几个实例.

假设算法中所利用的直纹面的方程为 $R(s, u(t)) = \{x(s, t), y(s, t), z(s, t)\}$, 其中 $s \in \mathbb{R}, t \in [0, l]$. 如果已知的光滑曲面 S 由隐式方程给出, 即为 $S: f(x, y, z) = 0$. 则它和直纹面的交线, 即曲面 S 上的插值曲线的方程为

$$f(x(s, t), y(s, t), z(s, t)) = 0.$$

如果已知的光滑曲面 S 的方程是参数式的, 即为 $S: r(u, v) = \{\bar{x}(u, v), \bar{y}(u, v), \bar{z}(u, v)\}$, 则曲面 S 上插值曲线的方程为

$$\begin{cases} \bar{x}(u, v) = x(s, t) \\ \bar{y}(u, v) = y(s, t) \\ \bar{z}(u, v) = z(s, t) \end{cases}$$

特别地, 如果曲面 S 是 NUBRS 曲面, 可以先将

曲面 S 离散^[9], 然后再求直纹面与离散后的曲面的交线, 这样可以大大节省计算量.

下面几个例子是用 MATLAB 软件完成的. 图中的黑点表示已知的插值点, 从每一插值点引出的线段表示在这一点给定的单位切向量. 图4所示的球面其方程为 $x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$. 图5所示的椭圆抛物面其方程为 $z = \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2}$. 图6所示的曲面其方程为 $z = \frac{1.5 \cos(0.8(x^2 + y^2))}{x^2 + y^2 + 0.8}$. 图7所示的曲面是一张双3次 Bézier 曲面, 其控制顶点为

$$\begin{aligned} &\{-1.5, -1.5, 4.0\}, \{-0.5, -1.5, 2.0\}, \\ &\{0.5, -1.5, -1.0\}, \{1.5, -1.5, 2.0\}; \\ &\{-1.5, -0.5, 1.0\}, \{-0.5, -0.5, 3.0\}, \\ &\{0.5, -0.5, 0.0\}, \{1.5, -0.5, -1.0\}; \\ &\{-1.5, 0.5, 4.0\}, \{-0.5, 0.5, 0.0\}, \\ &\{0.5, 0.5, 3.0\}, \{1.5, 0.5, 4.0\}; \\ &\{-1.5, 1.5, -2.0\}, \{-0.5, 1.5, -2.0\}, \\ &\{0.5, 1.5, 0.0\}, \{1.5, 1.5, -1.0\} \end{aligned}$$

我们先将这张双3次 Bézier 曲面离散^[9], 然后再求它与直纹面的交线.

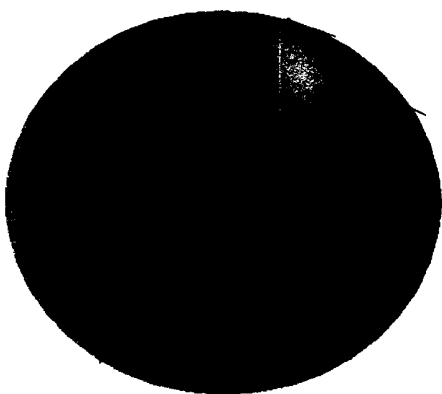


图4 球面上的 G^1 插值曲线

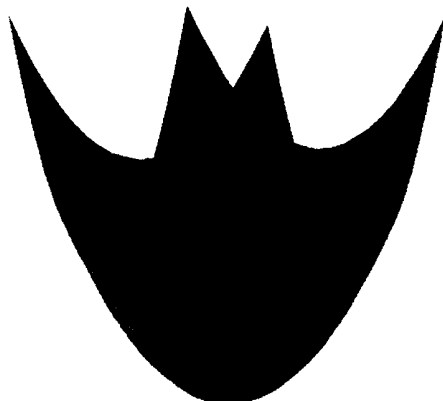


图5 椭圆抛物面上的 G^1 插值曲线

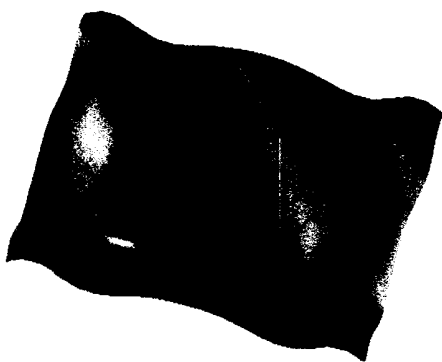


图6 超越函数曲面上的 G^1 插值曲线

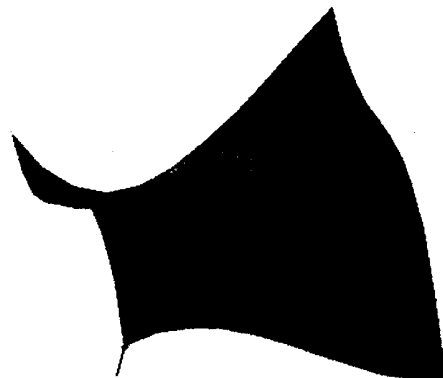


图7 自由曲面上的 G^1 插值曲线

4 结 论

本文研究了限制在已知光滑曲面上的保持 G^1 连续的曲线插值算法. 首先构造一条插值给定点及给定单位切向量的空间 3 次 Bézier 样条插值曲线, 然后以这条曲线为基线, 构造一张直纹面. 那么这张直纹面和已知光滑曲面的交线, 就是所求的在已知光滑曲面上插值给定点列且保持 G^1 连续的插值曲线. 表面上的这条插值曲线实际上是空间 3 次 Bézier 样条插值曲线在这张光滑表面上的投影, 它的性质与直纹面的直母线的方向向量的取法有很大的关系. 在本文中, 我们设计的直母线的方向向量, 使所得到的表面上的插值曲线保持 G^1 连续. 我们进一步的研究工作是, 怎样构造空间插值曲线, 以及怎样选取直纹面的直母线的方向向量, 才能得到保持高阶连续的曲面插值曲线. 另外, 我们还将研究满足某些特定约束条件的表面上的插值曲线, 如用什么方法得到的插值曲线其两个型值点之间的弧长在表面上所有过这两点的曲线中是最短的, 就是一个饶有趣味和富有实用价值的课题.

致谢 本文研究得到微软亚洲研究院刘利刚博士的建设性意见, 在此表示感谢!

参 考 文 献

- [1] K Shoemake. Animation rotation with quaternion curves [J]. Computer Graphics, 1985, 19(3): 245~254
- [2] Daniel P. Quaternion calculus as a basic tool in computer graphics [J]. The Visual Computer, 1989, 5(1): 2~13
- [3] H Tam, H Xu, Z.Zhou. Iso-planar interpolation for the machining of implicit surfaces [J]. Computer-Aided Design, 2002, 34(2): 125~136
- [4] Lo C-C. Real-time generation and control of cutter path for 5-axis CNC machining [J]. International Journal of Machine Tool and Manufacture, 1999, 39(3): 471~488
- [5] Ulrich N, Carl O. Robot navigation in the real world: Experiments with Manchester's FortyTwo in unmodified, large environments [J]. Robotics and Autonomous Systems, 2002, 33(4): 223~242
- [6] Peng Lixiao, Liang Qiao, Basic Course for 3D Studio Max R3 Modeling [M]. Beijing: Beijing Hope Electronic Press, 2000(in Chinese)
(彭礼孝, 梁 乔. 3D Studio Max R3 建模基础教程[M]. 北京, 北京希望电子出版社, 2000)
- [7] Zhang Huai. Generation and properties of Bézier curve on sphere [D]. Shanghai: Fudan University, 1994(in Chinese)
(张 怀. 球面 Bézier 曲线的生成及其性质[博士学位论文]. 上海: 复旦大学, 1994)
- [8] Zhang Huai. C^1 continuous interpolation curve on smooth surface [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 1997, 9(5): 385~390(in Chinese)
(张 怀. 限制在光滑表面上的 C^1 曲线插值方法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 1997, 9(5): 385~390)
- [9] Wang Guojin, Wang Guozhao, Zheng Jianmin. Computer Aided Geometry Design [M]. Beijing: Higher Education Press, 2001 (in Chinese)
(王国瑾, 汪国昭, 郑建民. 计算机辅助几何设计[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001)
- [2] Hu C-Y, Maekawa T, Sherbrooke E C, *et al.* Robust interval algorithm for curve intersections[J]. Computer-Aided Design, 1996, 28(6/7): 495~506
- [3] Hu C-Y, Maekawa T, Patrikalakis N M, *et al.* Robust interval algorithm for surface intersections[J]. Computer-Aided Design, 1997, 29(9): 617~627
- [4] Tuohy S T, Maekawa T, Shen G, *et al.* Approximation of measured data with interval B-splines [J]. Computer-Aided Design, 1997, 29(11): 791~799
- [5] Pottmann H, Odehnal B, Peternell M, *et al.* On optimal tolerance in computer-aided design [A]. In: Proceedings. of Pacific Graphics 2000[C]. HongKong: IEEE Computer Society Press, 2000. 347~363
- [6] Wallner J, Krasauskas R, Pottmann H. Error propagation in geometric construction [J]. Computer-Aided Design, 2000, 32(11): 631~641
- [7] Farouki R T, Moon H P, Ravani B. Minkowski geometric algebra of complex sets [J]. Geometric Dedicata, 2001, 85(1/3): 283~315

(上接第 540 页)