ISSN 1000-9825, CODEN RUXUEW
Journal of Software,Vol.17, No.3, March 2006, pp.516−524
DOI: 10.1360/jos170516

E-mail: jos@iscas.ac.cn
http://www.jos.org.cn
Tel/Fax: +86-10-62562563

Bézier 曲线曲面正则性的判别条件*

蔺宏伟+, 王 青, 鲍虎军

(浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室,浙江 杭州 310027)

Conditions for Determining the Regularity of Bézier Curve and Surface

LIN Hong-Wei+, WANG Qing, BAO Hu-Jun

(State Key Laboratory of CAD&CG, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

+ Corresponding author: Phn: +86-571-88206681 ext 518, E-mail: hwlin@cad.zju.edu.cn, http://www.cad.zju.edu.cn/home/hwlin

Lin HW, Wang Q, Bao HJ. Conditions for determining the regularity of Bézier curve and surface. *Journal of Software*, 2006,17(3):516−524. http://www.jos.org.cn/1000-9825/17/516.htm

Abstract: Regularity is an important algebraic property of parametric curve and surface, which depends on the parameterization of parametric curve and surface. In computer-aided manufacturing, the processed parametric curve and surface should be regular, so the parametric curve and surface generated by computer-aided design should be regular first. However, the computation of determining the regularity of parametric curve and surface by solving equation or system of equations induced by the definition of regularity is considerably complex, and is actually infeasible. In this paper, by transforming the parametric representations of derivative vector curve (of Bézier curve) and normal vector surface (of Bézier surface) to their implicit representations, a simple and practical sufficient condition for determining the regularity of Bézier curve and surface is presented.
Key words: Bézier curve and surface; regularity; determining condition; implicitization

摘 要: 正则性是参数曲线曲面的重要代数性质,是由参数曲线曲面的参数化决定的.在计算机辅助制造过程中,要求所处理的参数曲线曲面是正则的,前提是计算机辅助设计得到的参数曲线曲面是正则曲线曲面.然而,直接按照正则参数曲线曲面的定义,采用解方程或方程组的方法来判断曲线曲面是否正则,其计算相当复杂,实际上也是行不通的.通过将 Bézier 曲线曲面的导矢曲线(法矢曲面)的参数表示转换为隐式表示,得到了一个判断 Bézier 曲线曲面正则性的简单而实用的充分条件.
关键词: Bézier 曲线曲面;正则性;判别条件;隐式化
中图法分类号: TP393 文献标识码: A

在计算机辅助几何设计中,参数曲线曲面的正则性是一个重要性质.众所周知,一个参数曲线是正则的,如果这条曲线的每一点处的切向量都不为 0;一个参数曲面是正则曲面,如果这个参数曲面每一点的法向量都不

* Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant Nos.60021201, 60503057, 60333010 (国家自然科学基金); the National Grand Fundamental Research 973 Program of China under Grant No.2004CB719400 (国家重点基础研究发展规划(973))

Received 2005-04-13; Accepted 2005-05-09

为 0.参数曲线曲面的正则性是它们的代数性质,由这个曲线曲面的参数化来决定[1].

在计算机辅助制造过程中,往往要求被处理的参数曲线曲面是正则曲线曲面.否则,如果曲线曲面上存在非正则点,对这些点的处理将非常复杂,有时甚至导致处理过程失败.例如,在数控加工过程中,如果被加工的参数曲面上存在非正则点,那么,在这一点将失去加工方向,使加工过程无法进行.因而,由计算机辅助设计得到的参数曲面必须是正则曲面.又如,给定一系列点(有序或无序),要求得到插值或者逼近这些点的正则的 Bézier 曲线曲面;再如,在对 Bézier 曲面的裁剪操作中,常常在曲面的定义域上得到一个有 4 条边界线的区域,为了将这个区域重新参数化成一个矩形域,必须计算一张插值这 4 条边界线的正则曲面.所有这些,都需要一个判断 Bézier 曲线曲面是否正则的条件.

另一方面,判断参数曲线曲面的正则性,也是评价参数曲线曲面参数化质量的一个基本问题.曲面的一个好的参数化,首先必须是正则的,并且,参数曲线网的分布尽可能均匀.

给定一张 Bézier 曲面 S:$\boldsymbol{r}(u,v)$,在曲面 S 上每一点处的法向量为 $N=\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v$,正如前面指出的,如果在曲面 S 上每一点, $\boldsymbol{N}$ 都不是零向量,那么曲面 S 是正则曲面.但是,考察 Bézier 曲面 S 的法向量是否为 0,要涉及到求解两元非线性方程组,这是一个困难的问题,尤其当方程组的次数较高时[2],通常用数值方法求解.然而,用数值方法得不到方程组的精确解,也就无法判断曲面是否正则.因而,用解方程组的方法判断曲面的正则性是不可行的.类似地,用解非线性方程的方法判断 Bézier 曲线的正则性也是行不通的.

到目前为止,研究 Bézier 曲线曲面正则性判别方法的文献比较少见.就我们所知,Farin 曾经研究过在 Bézier 曲面的角点处的法向量的情况[3].在本文中,我们给出了一个切实可行的判断 Bézier 曲线曲面正则性的充分条件.具体来说,对于给定的 Bézier 曲线曲面,首先求出它们的导矢曲线或法矢曲面,然后,将相应的导矢曲线或法矢曲面转化为隐式曲线曲面.通过曲线曲面的隐式表示,可以很容易地判断原点是否位于相应的导矢曲线或法矢曲面上.如果相应的导矢曲线段或法矢曲面片经过原点,那么,给定的 Bézier 曲线曲面上存在非正则点;否则,它们就是正则的.这样,判断 Bézier 曲线曲面的正则性问题,就转化为判断相应的隐式表示的导矢曲线段或法矢曲面片上是否存在原点的问题,这个问题是容易解决的.

本文第 1 节给出平面和空间 Bézier 曲线是正则曲线的充分条件.第 2 节对 Bézier 曲面的正则性进行讨论.最后一节总结全文.

1 Bézier 曲线正则性的判别条件

首先介绍判断平面 Bézier 曲线正则性的一个充分条件,然后,给出判断空间 Bézier 曲线正则性的充分条件.

1.1 平面Bézier曲线正则性的判别条件

给定一条平面 Bézier 曲线:

$$\boldsymbol{P}(t)=\left(x(t),y(t)\right)=\sum_{i=0}^{n}\boldsymbol{P}_iB_i^n(t)=\sum_{i=0}^{n}(x_i,y_i)B_i^n(t),t\in[0,1] \tag{1}$$

其中,$\left\{B_i^n(t)=C_n^it^i(1-t)^{n-i}\middle|i=0,1,...,n\right\}$ 为 Bernstein 基.它的导矢曲线为

$$\boldsymbol{R}(t)={\mathrm{d}\boldsymbol{P}}/{\mathrm{d}t}=\sum_{i=0}^{n-1}(\boldsymbol{P}_{i+1}-\boldsymbol{P}_i)B_i^{n-1}(t)=\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i,y_{i+1}-y_i)B_i^{n-1}(t),t\in[0,1] \tag{2}$$

把式(2)改写为

$$\boldsymbol{R}(t)=\frac{\sum_{i=0}^{n-1}(\boldsymbol{P}_{i+1}-\boldsymbol{P}_i)B_i^{n-1}(t)}{\sum_{i=0}^{n-1}B_i^{n-1}(t)} \tag{3}$$

为了得到导矢曲线(3)的隐式方程,需要将式(3)中的 Bernstein 基转换为幂基,为此,作变换 $u=\frac{1-t}{t}$,则 $t=\frac{1}{1+u}$,$0\le u<+\infty$.于是[4],

$$\boldsymbol{R}(t)=\boldsymbol{R}\left(\frac{1}{1+u}\right)=\frac{\sum_{i=0}^{n-1}(\boldsymbol{P}_{i+1}-\boldsymbol{P}_i)C_{n-1}^{i}u^{n-1-i}}{\sum_{i=0}^{n-1}C_{n-1}^{i}u^{n-1-i}}=(x(u),y(u)),\ u\in[0,+\infty) \tag{4}$$

由上式可以得到

$$\begin{cases}\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i-x)C_{n-1}^{i}u^{n-1-i}=0,\\ \sum_{i=0}^{n-1}(y_{i+1}-y_i-y)C_{n-1}^{i}u^{n-1-i}=0.\end{cases}\ u\in[0,+\infty) \tag{5}$$

它的 Sylvester 结式(Sylvester’s resultant),也就是说,导矢曲线(2)的隐式方程为[5]

$$F(x,y)=det(A)=det\left(\begin{bmatrix}a_0(x) & a_1(x) & \dots & a_{n-2}(x) & a_{n-1}(x) & & & \\ & a_0(x) & a_1(x) & \dots & a_{n-2}(x) & a_{n-1}(x) & & \\ & & \dots & \dots & \dots & & & \\ & & & a_0(x) & a_1(x) & & \dots & a_{n-1}(x)\\ b_0(y) & b_1(y) & \dots & b_{n-2}(y) & b_{n-1}(y) & & & \\ & b_0(y) & b_1(y) & \dots & b_{n-2}(y) & b_{n-1}(y) & & \\ & & \dots & \dots & \dots & & & \\ & & & b_0(y) & b_1(y) & & \dots & b_{n-1}(y)\end{bmatrix}\right)=0 \tag{6}$$

其中, $F(x,y)$ 是 $2(n-1)\times 2(n-1)$ 阶行列式, $\begin{cases}a_i(x)=C_{n-1}^{i}(x_{i+1}-x_i-x)\\ b_i(y)=C_{n-1}^{i}(y_{i+1}-y_i-y)\end{cases}$, $i=0,1,\dots,n-1.$

显然,只要导矢曲线(2)不经过原点,也就是说, $F(0,0)\neq 0$,那么平面 Bézier 曲线(1)上没有导矢为 0 的点,它就是一条正则曲线.由此,我们得到定理 1.

定理 **1**. 如果行列式

$$F(0,0)=det\left(\begin{bmatrix}a_0(0) & a_1(0) & \dots & a_{n-2}(0) & a_{n-1}(0) & & & \\ & a_0(0) & a_1(x) & \dots & a_{n-2}(0) & a_{n-1}(0) & & \\ & & \dots & \dots & \dots & & & \\ & & & a_0(0) & a_1(0) & & \dots & a_{n-1}(0)\\ b_0(0) & b_1(0) & \dots & b_{n-2}(0) & b_{n-1}(0) & & & \\ & b_0(0) & b_1(0) & \dots & b_{n-2}(0) & b_{n-1}(0) & & \\ & & \dots & \dots & \dots & & & \\ & & & b_0(0) & b_1(0) & & \dots & b_{n-1}(0)\end{bmatrix}\right)\neq 0 \tag{7}$$

那么,平面 Bézier 曲线(1)为正则曲线.

实际上, $F(0,0)\neq 0$ 的充要条件是 $a_0(0)=x_1-x_0$ 与 $b_0(0)=y_1-y_0$ 不同时为 0,且两个多项式

$$C_{n-1}^{0}(x_1-x_0)t^{n-1}+C_{n-1}^{1}(x_2-x_1)t^{n-2}+\dots+C_{n-1}^{n-1}(x_n-x_{n-1})=0 \tag{8}$$

$$C_{n-1}^{0}(y_1-y_0)t^{n-1}+C_{n-1}^{1}(y_2-y_1)t^{n-2}+\dots+C_{n-1}^{n-1}(y_n-y_{n-1})=0 \tag{9}$$

在复数域上没有公共根.

1.2 空间Bézier曲线正则性的判别条件

给定一条空间 Bézier 曲线

$$\boldsymbol{P}(t)=(x(t),y(t),z(t))=\sum_{i=0}^{n}\boldsymbol{P}_iB_i^n(t)=\sum_{i=0}^{n}(x_i,y_i,z_i)B_i^n(t),t\in[0,1] \tag{10}$$

其中, $\left\{B_i^n(t)=C_n^it^i(1-t)^{n-i}\,\middle|\,i=0,1,\dots,n\right\}$ 为 Bernstein 基.它的导矢曲线为

$$\boldsymbol{R}(t)=\mathrm{d}\boldsymbol{P}/\mathrm{d}t=\sum_{i=0}^{n-1}(\boldsymbol{P}_{i+1}-\boldsymbol{P}_i)B_i^{n-1}(t)=\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i,y_{i+1}-y_i,z_{i+1}-z_i)B_i^{n-1}(t),t\in[0,1] \tag{11}$$

与第 1.1 节的方法类似,通过变换 $t=\dfrac{1}{1+u},\ 0\le u<+\infty$,可以得到

$$\begin{cases}\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i-x)C_{n-1}^{i}u^{n-1-i}=0,\\ \sum_{i=0}^{n-1}(y_{i+1}-y_i-y)C_{n-1}^{i}u^{n-1-i}=0,\ u\in[0,+\infty).\\ \sum_{i=0}^{n-1}(z_{i+1}-z_i-z)C_{n-1}^{i}u^{n-1-i}=0\end{cases} \tag{12}$$

记

$$F(x,y)=det(A)=det\left(\begin{bmatrix} a_0(x) & a_1(x) & \cdots & a_{n-2}(x) & a_{n-1}(x) & & & \\ & a_0(x) & a_1(x) & \cdots & a_{n-2}(x) & a_{n-1}(x) & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ & & & a_0(x) & a_1(x) & & \cdots & a_{n-1}(x) \\ b_0(y) & b_1(y) & \cdots & b_{n-2}(y) & b_{n-1}(y) & & & \\ & b_0(y) & b_1(y) & \cdots & b_{n-2}(y) & b_{n-1}(y) & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ & & & b_0(y) & b_1(y) & & \cdots & b_{n-1}(y)\end{bmatrix}\right)=0 \tag{13}$$

$$G(x,z)=det(B)=det\left(\begin{bmatrix} a_0(x) & a_1(x) & \cdots & a_{n-2}(x) & a_{n-1}(x) & & & \\ & a_0(x) & a_1(x) & \cdots & a_{n-2}(x) & a_{n-1}(x) & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ & & & a_0(x) & a_1(x) & & \cdots & a_{n-1}(x) \\ c_0(z) & c_1(z) & \cdots & c_{n-2}(z) & c_{n-1}(z) & & & \\ & c_0(z) & c_1(z) & \cdots & c_{n-2}(z) & c_{n-1}(z) & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ & & & c_0(z) & c_1(z) & & \cdots & c_{n-1}(z)\end{bmatrix}\right)=0 \tag{14}$$

$$H(y,z)=det(C)=det\left(\begin{bmatrix} b_0(y) & b_1(y) & \cdots & b_{n-2}(y) & b_{n-1}(y) & & & \\ & b_0(y) & b_1(y) & \cdots & b_{n-2}(y) & b_{n-1}(y) & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ & & & b_0(y) & b_1(y) & & \cdots & b_{n-1}(y) \\ c_0(z) & c_1(z) & \cdots & c_{n-2}(z) & c_{n-1}(z) & & & \\ & c_0(z) & c_1(z) & \cdots & c_{n-2}(z) & c_{n-1}(z) & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ & & & c_0(z) & c_1(z) & & \cdots & c_{n-1}(z)\end{bmatrix}\right)=0 \tag{15}$$

其中,A,B 和 C 均为 $2(n-1)\times 2(n-1)$ 矩阵,且 $\begin{cases}a_i(x)=C_{n-1}^{i}(x_{i+1}-x_i-x)\\ b_i(y)=C_{n-1}^{i}(y_{i+1}-y_i-y),\ i=0,1,\ldots,n-1.\\ c_i(z)=C_{n-1}^{i}(z_{i+1}-z_i-z)\end{cases}$ $F(x,y)$ 是式(12)中第 1 与第 2 个方程的结式,表示轴平行于 z 轴的柱面,$G(x,z)$ 是第 1 与第 3 个方程的结式,表示轴平行于 y 轴的柱面,$H(y,z)$ 是第 2 与第 3 个方程的结式,表示轴平行于 x 轴的柱面.于是,空间 Bézier 曲线(10)的导矢曲线(11)可以看作柱面 $F(x,y)$ 与 $G(x,z)$ 的交线,或者柱面 $F(x,y)$ 与 $H(y,z)$ 的交线,或者柱面 $G(x,z)$ 与 $H(y,z)$ 的交线.因此,只要 $F(0,0)$, $G(0,0)$ 和 $H(0,0)$ 这 3 个式子中有一个不为 0,导矢曲线(11)就不会经过原点,从而,空间 Bézier 曲线(10)是一条正则曲线.这样,我们得到定理 2.

定理 **2**. 只要 $F(0,0)$, $G(0,0)$ 和 $H(0,0)$ 这 3 个式子中有一个不为 0,空间 Bézier 曲线(10)就是一条正则曲线.

1.3 计算实例

两个 n 次多项式 $a(t)=\sum_{i=0}^{n}a_i t^{n-i}$ 和 $b(t)=\sum_{i=0}^{n}b_i t^{n-i}$ 的结式有多种表示方法[6],其中,Sylvester 结式的元素结构简单,但是阶数比较高,为 $2n\times 2n$ 阶;Bézout 结式的元素结构比较复杂,但是阶数低,为 $n\times n$ 阶.因此,当多项

式的次数较高时,采用 Bézout 结式计算量比较小.对于上述两个 n 次多项式,它们的 Bézout 结式的矩阵为[7]

$$Bez(a,b)=S(a)S(\hat{b})E-S(b)S(\hat{a})E \tag{16}$$

其中

$$S(a)=\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_0 \\ a_{n-2} & & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, S(\hat{a})=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_2 & & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

$$S(b)=\begin{bmatrix} b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_0 \\ b_{n-2} & & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, S(\hat{b})=\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ b_2 & & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

E 为反序单位矩阵,

$$E=\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

由定理 1 和定理 2 可以看出,只要知道了 Bézier 曲线的控制顶点,就可以判断它的正则性.

例 1:给定一条平面 3 次 Bézier 曲线,它的控制顶点为 $\boldsymbol{P}_1=(0,0)$, $\boldsymbol{P}_2=(2,1)$, $\boldsymbol{P}_3=(3,2)$, $\boldsymbol{P}_4=(4,0)$.这条 Bézier 曲线的导矢曲线的控制顶点依次为 $(2,1)$, $(1,1)$, $(1,-2)$.采用 Sylvester 结式,

$$F(0,0)=det\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}\right)=37 .$$

采用 Bézout 结式,

$$F(0,0)=det\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)=-37 ,$$

根据定理 1,这条 Bézier 曲线为正则曲线.

例 2:给定一条空间 3 次 Bézier 曲线,它的控制顶点为 $\boldsymbol{P}_1=(0,0,0)$, $\boldsymbol{P}_2=(2,1,2)$, $\boldsymbol{P}_3=(3,2,3)$, $\boldsymbol{P}_4=(4,3,0)$. 这条 Bézier 曲线的导矢曲线的控制顶点依次为 $(2,1,2)$, $(1,1,1)$,(1,1,–3).采用 Sylvester 结式,

$$F(0,0)=det\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\right)=1, H(0,0)=det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}\right)=9, .$$

采用 Bézout 结式

$$F(0,0)=det\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)=-1 ,$$

$$H(0,0)=det\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)=-25 ,$$

根据定理 2,这条空间 Bézier 曲线是一条正则曲线.

2 Bézier 曲面正则性的判别条件

2.1 判别条件

给定一张 Bézier 曲面

$$\boldsymbol{P}(s,t)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\boldsymbol{P}_{ij}B_i^m(s)B_j^n(t) \tag{17}$$

它的法矢曲面是

$$\boldsymbol{N}(u,v)=\boldsymbol{P}_u\times\boldsymbol{P}_v=\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-1}\left(\nabla_i\boldsymbol{P}_{ij}\times\nabla_l\boldsymbol{P}_{kl}\right)B_i^{m-1}(s)B_k^m(s)B_j^n(t)B_l^{n-1}(t) \tag{18}$$

其中,

$$\nabla_i\boldsymbol{P}_{ij}=\boldsymbol{P}_{i+1,j}-\boldsymbol{P}_{ij},\ i=0,1,\ldots,m-1,\ j=0,1,\ldots,n,\ \nabla_l\boldsymbol{P}_{kl}=\boldsymbol{P}_{k,l+1}-\boldsymbol{P}_{kl},\ k=0,1,\ldots,m,\ l=0,1,\ldots,n-1.$$

由于

$$B_i^{m-1}(s)B_k^m(s)=\frac{C_{m-1}^iC_m^kB_{i+k}^{2m-1}(s)}{C_{2m-1}^{i+k}},\ B_j^n(t)B_l^{n-1}(t)=\frac{C_n^jC_{n-1}^lB_{j+l}^{2n-1}(t)}{C_{2n-1}^{j+l}},$$

所以,式(18)变为

$$\boldsymbol{N}(s,t)=\sum_{p=0}^{2m-1}\sum_{q=0}^{2n-1}\left[\sum_{i+k=p}\sum_{j+l=q}\left(\nabla_i\boldsymbol{P}_{ij}\times\nabla_l\boldsymbol{P}_{kl}\right)\frac{C_{m-1}^iC_m^k}{C_{2m-1}^{i+k}}\frac{C_n^jC_{n-1}^l}{C_{2n-1}^{j+l}}\right]B_{i+k}^{2m-1}(s)B_{j+l}^{2n-1}(t) \tag{19}$$

令 $\boldsymbol{N}_{pq}=\sum_{i+k=p}\sum_{j+l=q}\left(\nabla_i\boldsymbol{P}_{ij}\times\nabla_l\boldsymbol{P}_{kl}\right)\frac{C_{m-1}^iC_m^k}{C_{2m-1}^{i+k}}\frac{C_n^jC_{n-1}^l}{C_{2n-1}^{j+l}}$,则

$$[\boldsymbol{N}_{pq}]_{2m\times 2n}=D_1A\left(\begin{bmatrix} C_{m-1}^0C_n^0\nabla_i\boldsymbol{P}_{00} & \cdots & C_{m-1}^0C_n^n\nabla_i\boldsymbol{P}_{0n}\\ \cdots & & \cdots\\ C_{m-1}^{m-1}C_n^0\nabla_i\boldsymbol{P}_{m-1,0} & \cdots & C_{m-1}^{m-1}C_n^n\nabla_i\boldsymbol{P}_{m-1,0}\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix} C_m^0C_{n-1}^0\nabla_j\boldsymbol{P}_{00} & \cdots & C_m^0C_{n-1}^{n-1}\nabla_j\boldsymbol{P}_{0,n-1}\\ \cdots & & \cdots\\ C_m^mC_{n-1}^0\nabla_j\boldsymbol{P}_{m,0} & \cdots & C_m^mC_{n-1}^{n-1}\nabla_j\boldsymbol{P}_{m,n-1}\end{bmatrix}\right)BD_2 \tag{20}$$

其中 D_1 与 D_2 为对角阵

$$D_1=diag\left(1/C_{2m-1}^0,\ 1/C_{2m-1}^1,\ \ldots,\ 1/C_{2m-1}^{2m-1}\right),\ D_2=diag\left(1/C_{2n-1}^0,\ 1/C_{2n-1}^1,\ \ldots,\ 1/C_{2n-1}^{2n-1}\right),$$

$\otimes$ 为矩阵的 kronecker 乘积符号,其两边矩阵的元素为向量,向量之间的乘积为外积.另外,A 是一个 $2m\times m(m+1)$ 阶矩阵,B 是一个 $n(n+1)\times 2n$ 阶矩阵,

$$A=\begin{pmatrix} I_m & & & \\ & I_m & & \\ & & \ddots & \\ & & & I_m\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix} I_n & & & \\ & I_n & & \\ & & \ddots & \\ & & & I_n\end{pmatrix} \tag{21}$$

矩阵 A 由 m 个 $m+1$ 阶单位矩阵组成,相邻两个单位矩阵错开一行,比如第 1 个 $m+1$ 阶单位矩阵从第 1 行到第 $m+1$ 行,则第 2 个 $m+1$ 阶单位矩阵从第 2 行到第 $m+2$ 行,依次类推;矩阵 B 由 $n+1$ 个 n 阶单位矩阵组成,相邻两个单位矩阵错开一列,比如第 1 个 n 阶单位矩阵从第 1 列到第 n 列,则第 2 个 n 阶单位矩阵从第 2 列到第 $n+1$ 列.

与第 1.1 节类似,作变换 $t=\frac{1}{1+u},\ s=\frac{1}{1+v},\ 0\le u<+\infty,\ 0\le v<+\infty$,式(19)变为

$$\boldsymbol{N}(u,v)=\frac{\sum_{p=0}^{2m-1}\sum_{q=0}^{2n-1}\boldsymbol{N}_{pq}C_{2m-1}^pC_{2n-1}^qu^{2m-1-p}v^{2n-1-q}}{\sum_{p=0}^{2m-1}\sum_{q=0}^{2n-1}C_{2m-1}^pC_{2n-1}^qu^{2m-1-p}v^{2n-1-q}}=\left(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)\right) \tag{22}$$

若令 $\boldsymbol{N}_{pq}=\left(x_{pq},y_{pq},z_{pq}\right)$,则得到一个二元方程组

$$\begin{cases}\sum_{p=0}^{2m-1}\sum_{q=0}^{2n-1}(x_{pq}-x(u,v))C_{2m-1}^{p}C_{2n-1}^{q}u^{2m-1-p}v^{2n-1-q}=0\\ \sum_{p=0}^{2m-1}\sum_{q=0}^{2n-1}(y_{pq}-y(u,v))C_{2m-1}^{p}C_{2n-1}^{q}u^{2m-1-p}v^{2n-1-q}=0\\ \sum_{p=0}^{2m-1}\sum_{q=0}^{2n-1}(z_{pq}-z(u,v))C_{2m-1}^{p}C_{2n-1}^{q}u^{2m-1-p}v^{2n-1-q}=0\end{cases} \tag{23}$$

它的 Sylvester 结式,即导矢曲面(19)的隐式表达式为[5,6]

$$S(x,y,z)=det\left(\begin{bmatrix}S_0 & \dots & S_{2m-2} & S_{2m-1} & & & & & \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & & & & \\ & & S_0 & S_1 & \dots & S_{2m-1} & & & \\ & & & S_0 & \dots & S_{2m-2} & S_{2m-1} & & \\ & & & & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & & & & S_0 & S_1 & \dots & S_{2m-1}\end{bmatrix}_{2(2m-1)\times 3(2m-1)}\right)=0 \tag{24}$$

其中,

$$S_i=\begin{bmatrix}a_{i0} & a_{i1} & \dots & a_{i,2n-2} & a_{i,2n-1} & & & & \\ & a_{i0} & a_{i1} & \dots & a_{i,2n-2} & a_{i,2n-1} & & & \\ & & \dots & \dots & \dots & & & & \\ & & & a_{i0} & a_{i1} & \dots & a_{i,2n-2} & a_{i,2n-1} & \\ b_{i0} & b_{i1} & \dots & b_{i,2n-2} & b_{i,2n-1} & & & & \\ & b_{i0} & b_{i1} & \dots & b_{i,2n-2} & b_{i,2n-1} & & & \\ & & \dots & \dots & \dots & & & & \\ & & & b_{i0} & b_{i1} & \dots & b_{i,2n-2} & b_{i,2n-1} & \\ c_{i0} & c_{i1} & \dots & c_{i,2n-2} & c_{i,2n-1} & & & & \\ & c_{i0} & c_{i1} & \dots & c_{i,2n-2} & c_{i,2n-1} & & & \\ & & \dots & \dots & \dots & & & & \\ & & & c_{i0} & c_{i1} & \dots & c_{i,2n-2} & c_{i,2n-1} & \end{bmatrix}_{3(2n-1)\times 2(2n-1)},$$

$a_{ij}=\left(x_{ij}-x\right)C_{2m-1}^{i}C_{2n-1}^{j}$, $b_{ij}=\left(y_{ij}-y\right)C_{2m-1}^{i}C_{2n-1}^{j}$, $c_{ij}=\left(z_{ij}-z\right)C_{2m-1}^{i}C_{2n-1}^{j}$, $i=0,1,\dots,2m-1$, $j=0,1,\dots,2n-1$.

于是,如果 $S(0,0,0)\neq 0$,那么,法矢曲面(19)不经过原点,这说明原 Bézier 曲面(17)为正则曲面.由此,我们得到定理 3.

定理 3. 如果 $S(0,0,0)\neq 0$,Bézier 曲面(17)为正则曲面.

2.2 计算实例

与曲线的情况类似,表示参数曲面的二元多项式组

$$x(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}a_{i,j}u^{i}v^{j},\ y(u,v)=\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}b_{k,l}u^{k}v^{l},\ z(u,v)=\sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{n}c_{p,q}u^{p}v^{q}$$

的结式有多种表示形式,其中,Sylvester 结式的结构比较简单,但是阶数较高,为 $6mn\times 6mn$ 阶;Cayley 结式的阶数为 $2mn\times 2mn$,但是它的结构比较复杂.令

$$|i,j;k,l;p,q|=det\left(\begin{bmatrix}a_{i,j} & b_{i,j} & c_{i,j}\\ a_{k,l} & b_{k,l} & c_{k,l}\\ a_{p,q} & b_{p,q} & c_{p,q}\end{bmatrix}\right),$$

上述二元多项式组的 Cayley 结式的矩阵为[8]

$$S=\begin{bmatrix}c_{m-1,2n-1,2m-1,n-1} & \dots & c_{m-1,2n-1,0,0}\\ \dots & c_{\sigma,\tau,a,b} & \dots\\ c_{0,0,2m-1,n-1} & \dots & c_{0,0,0,0}\end{bmatrix} \tag{25}$$

其中,

$$c_{\sigma,\tau,a,b}=\frac{\displaystyle\sum_{u=0}^{\min(a,m-1-\sigma)}\sum_{v=0}^{\min(b,2n-1-\tau)}\sum_{k=\max(0,a-u-\sigma)}^{\min(m,a-u)}\sum_{l=\max(b+1,\tau+1+v-b)}^{\min(n,\tau+1+v)}|\sigma+1+u,\tau+1+v-l;k,l;a-u-k,b-v|+}{\displaystyle\sum_{u=0}^{\min(a,m-1-\sigma)}\sum_{v=0}^{\min(b,2n-1-\tau)}\sum_{k=\max(0,a-u-m)}^{\min(m,a-u)}\sum_{l=\max(b+1,\tau+1+v-n)}^{\min(n,\tau+1+v)}|\sigma+1+u,\tau+1+v-l;k,l;a-u-k,b-v|}.$$

当多项式组的次数较高时,采用 Cayley 结式可以有效降低结式的阶数.下面我们给出一个例子.

给定一张 2×2 次 Bézier 曲面,控制顶点为

$$\boldsymbol{P}_{00}=(0,0,0),\ \boldsymbol{P}_{01}=(1,2,-1),\ \boldsymbol{P}_{02}=(-1,3,1),$$
$$\boldsymbol{P}_{10}=(2,0,3),\ \boldsymbol{P}_{11}=(3,1,1),\ \boldsymbol{P}_{12}=(2,3,2),$$
$$\boldsymbol{P}_{20}=(4,-1,2),\boldsymbol{P}_{21}=(5,1,2),\boldsymbol{P}_{22}=(4,4,1),$$

则 i-向差分向量为

$$\nabla_i\boldsymbol{P}_{00}=(2,0,3),\ \nabla_i\boldsymbol{P}_{01}=(2,-1,2),\ \nabla_i\boldsymbol{P}_{02}=(3,0,1),$$
$$\nabla_i\boldsymbol{P}_{10}=(2,-1,-1),\ \nabla_i\boldsymbol{P}_{11}=(2,0,1),\ \nabla_i\boldsymbol{P}_{12}=(2,1,-1);$$

j-向差分向量为

$$\nabla_j\boldsymbol{P}_{00}=(1,2,-1),\ \nabla_j\boldsymbol{P}_{01}=(-2,1,2),$$
$$\nabla_j\boldsymbol{P}_{10}=(1,1,-2),\ \nabla_j\boldsymbol{P}_{11}=(-1,2,1),$$
$$\nabla_j\boldsymbol{P}_{20}=(1,2,0),\ \nabla_j\boldsymbol{P}_{21}=(-1,3,-1).$$

于是有

$$E=\begin{bmatrix} C_1^0C_2^0\nabla_i\boldsymbol{P}_{00} & C_1^0C_2^1\nabla_i\boldsymbol{P}_{01} & C_1^0C_2^2\nabla_i\boldsymbol{P}_{02} \\ C_1^1C_2^0\nabla_i\boldsymbol{P}_{10} & C_1^1C_2^1\nabla_i\boldsymbol{P}_{11} & C_1^1C_2^2\nabla_i\boldsymbol{P}_{12} \end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix} C_2^0C_1^0\nabla_j\boldsymbol{P}_{00} & C_2^0C_1^0\nabla_j\boldsymbol{P}_{01} \\ C_2^1C_1^0\nabla_j\boldsymbol{P}_{10} & C_2^1C_1^0\nabla_j\boldsymbol{P}_{11} \\ C_2^2C_1^0\nabla_j\boldsymbol{P}_{20} & C_2^2C_1^0\nabla_j\boldsymbol{P}_{21} \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} (-6,5,4) & (-3,-10,2) & (-6,8,10) & (-8,-16,0) & (-2,4,6) & (-1,-8,3) \\ (-6,14,4) & (-12,-10,8) & (0,24,12) & (-20,-16,12) & (-2,14,6) & (-4,-8,12) \\ (-6,3,4) & (-9,-1,6) & (-8,4,10) & (-10,0,10) & (-2,1,6) & (-3,2,9) \\ (3,1,5) & (-1,-2,0) & (-4,6,8) & (-2,-12,4) & (1,1,3) & (3,-2,4) \\ (6,6,6) & (2,-2,6) & (-4,20,8) & (-8,-12,16) & (-2,6,2) & (6,-2,10) \\ (2,-1,5) & (4,3,5) & (-4,2,8) & (-6,2,12) & (2,-1,3) & (2,3,7) \end{bmatrix}.$$

将矩阵 E , $D_1=diag\{1,1/3,1/3,1\}$, $D_2=diag\{1,1/3,1/3,1\}$,以及

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & & \\ & 1 & 0 & \\ & 0 & 1 & \\ & & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

代入式(20),可得法矢曲面的控制顶点为

$$[\boldsymbol{N}_{ij}]_{4\times 4}=\begin{bmatrix} (-6,5,4) & (-3,-0.6667,4) & (-3.3333,-4,2) & (-1,-8,3) \\ (-4,5.6667,2.6667) & (-3.2222,1.8889,4) & (-3.7778,-0.1111,3.7778) & (-2.3333,-2,7) \\ (3,2.3333,3.6667) & (-0.7778,2.4444,2.4444) & (-1.2222,-1.8889,2.7778) & (3,-1.3333,4.6667) \\ (2,-1,5) & (0,1.6667,4.3333) & (-1.3333,0.3333,5) & (2,3,7) \end{bmatrix}.$$

利用 Sylvester 结式,将上式中的值代入式(24),得 $S(0,0,0)=-2.9356\mathrm{e}{+}53\neq 0$;或者,利用 Cayley 结式,也可得到 $S(0,0,0)\neq 0$.所以,根据定理 3,给定的这张 2×2 次 Bézier 曲面是正则曲面.

以上这个例子以及第 1.3 节中的两个例子都是由 matlab 软件编程实现的.

3 讨论和总结

在本文中,通过将 Bézier 曲线曲面的参数表示转化为隐式表示,得到了判断 Bézier 曲线曲面是否正则的一个充分条件.当平面 Bézier 曲线的导矢曲线满足式(7)中的 $F(0,0)\neq 0$,或空间 Bézier 曲线的导矢曲线使得式(13)~式(15)中给出的 $F(0,0)\neq 0$, $G(0,0)\neq 0$ 和 $H(0,0)\neq 0$ 这 3 个式子中有两个成立,或者,Bézier 曲面的法矢曲面满足式(24)中给出的 $S(0,0,0)\neq 0$ 时,说明相应的导矢曲线或法矢曲面不经过原点,于是,给定的 Bézier 曲线曲面为正则曲线曲面.然而,如果相应的导矢曲线或法矢曲面经过原点,即上述各个式子中等号成立,那么,还需要反求出原点对应的参数值,根据其是否包含在 Bézier 曲线曲面的定义域 $[0,1]$ 或 $[0,1]\times[0,1]$ 中来判断相应的 Bézier 曲线曲面是否正则.但是,反求参数值的计算相当复杂.

另一方面,多项式组的结式有多种表达形式,其中,Sylvester 结式(Sylvester’s resultant)的元素结构很有规律,但是,当 Bézier 曲线曲面的次数比较高时,由这个结式导出的行列式(7),式(13)~式(15),式(24)的阶数相当高,给计算带来一定的困难.相反地,Bézout 结式(Bézout’s resultant)和 Cayley 结式(Cayley’s resultant)的元素结构比较复杂,但阶数较低,当 Bézier 曲线曲面的次数较高时,采用 Bézout 结式和 Cayley 结式可以有效地降低行列式的阶数[6−8].

由本文的几个定理我们可以看出,Bézier 曲线曲面的正则性完全由它的控制顶点决定,因此,理想的情况是,由 Bézier 曲线曲面的控制顶点的几何关系就可以判断它的正则性.这样,如何由定理 1~定理 3 中相应的行列式不等于 0 这些代数条件推导出与之等价的 Bézier 曲线曲面的控制顶点之间的几何关系,就成为我们今后工作的研究重点.

References:

[1] Piegl L, Tiller W. The NURBS Book. 2nd ed. Berlin: Springer-Verlag, 1997.

[2] Fausett LV. Numerical Methods Using Mathcad. New Jersey: Prentice-Hall, 2002.

[3] Farin G. Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design——A Practical Guide. 2nd ed. San Diego: Academic Press, 1990.

[4] Wang GJ, Wang GZ, Zheng JM. Computer Aided Geometric Design. Beijing: Higher Education Press; Berlin: Springer-Verlag, 2001 (in Chinese).

[5] Sederberg TW, Anderson DC, Goldman RN. Implicit representation of parametric curves and surfaces. Computer Vision, Graphics, and Image processing, 1984,28:72−84.

[6] Zhang M, Chionh E, Goldman RN. Hybrid dixon resultants. In: Cripps R, ed. Proc. of the 8th IMA Conf. on the Mathematics of Surfaces. Winchester: Information Geometers Ltd., 1998. 193−212.

[7] Chen JL,Chen XH. Special Matrices. Beijing: Tsinghua University Press, 2001 (in Chinese).

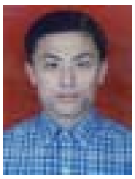
[8] Chionh EW.Concise parallel dixon determinant. Computer Aided Geometric Design, 1997,14:561−570.

附中文参考文献:

[4] 王国瑾,汪国昭,郑建民.计算机辅助几何设计.北京:高等教育出版社;柏林:施普林格出版社,2001.

[7] 陈景良,陈向晖.特殊矩阵.北京:清华大学出版社,2001.

蔺宏伟(1973－),男,山东莱芜人,博士,讲师,主要研究领域为计算机辅助几何设计,计算机图形学.



王青(1977－),男,博士,讲师,主要研究领域为计算机辅助几何设计.

鲍虎军(1966－),男,博士,研究员,博士生导师,主要研究领域为计算机图形学.