

## Catmull-Clark 细分曲面的正则性

王 晶, 蔺宏伟\*, 王 潇, 卢兴江

(浙江大学数学科学学院 杭州 310027)  
(浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室 杭州 310058)  
(hwlin@zju.edu.cn)

**摘要:** 针对 Catmull-Clark(C-C)细分曲面的正则性进行研究, 得到简单易用的判别 C-C 细分曲面正则性的充分条件. 首先给出网格点差分向量的 3 种定义: 前向差分向量, 中心差分向量和后向差分向量; 然后推导出 C-C 细分曲面的差分向量的细分格式; 进一步, 通过特征分析建立了 C-C 细分极限曲面的切向量与初始控制网格差分向量之间的关系; 最后得到判别 C-C 细分极限曲面正则性的一个充分条件. 由于该判别条件表达为初始控制网格差分向量之间的几何关系, 因此这个条件具有明显的几何意义. 实验结果表明, 文中的判别条件易于验证.

**关键词:** C-C 细分曲面; 初始控制网格; 差分向量; 正则性  
**中图法分类号:** TP391

## On Regularity of Catmull-Clark Subdivision Surfaces

Wang Jing, Lin Hongwei\*, Wang Xiao, and Lu Xingjiang

(School of Mathematical Science, Zhejiang University, Hangzhou 310027)  
(State Key Laboratory of CAD&CG, Zhejiang University, Hangzhou 310058)

**Abstract:** The regularity of the Catmull-Clark (C-C) subdivision surfaces is studied in this paper, aiming to deduce a simple and easy to use sufficient condition for discriminating the regularity of a C-C subdivision surface. Specifically, we first present the definitions of three types of difference vectors on the mesh, i.e., forward difference vector, central difference vector, and backward difference vector; and then, develop the subdivision formats of the difference vectors; moreover, the relationship between the tangent vectors of a C-C subdivision surface and the difference vectors of its initial control mesh is established by eigen analysis; finally, a sufficient condition for the regularity of a C-C subdivision surface is deduced. Because the condition is represented as the geometric relationship between the difference vectors on the initial control mesh, it has clear geometric meanings. Experiments show that the sufficient condition is easy to validate.

**Key words:** Catmull-Clark subdivision surface; initial control mesh; difference vector; regularity

计算机辅助几何设计中, 曲线曲面的正则性是一个十分重要的性质, 它一般被用来刻画函数的光滑性. 众所周知, 若一条参数曲线的任意点处的切向量不为 0, 则参数曲线是正则的; 若一条参数曲面的任意点处的法向量不为 0, 则参数曲面是

正则的. 在实际应用中, 保证曲线曲面的正则性是必要的. 假设曲线或曲面上有非正则点, 对这些点的处理将会很复杂, 严重的话甚至导致处理过程失败. 如在数控加工过程中, 如果参数曲面上有非正则点, 即这一点不存在加工方向, 那么加工过程

收稿日期: 2015-10-29; 修回日期: 2016-04-27. 基金项目: 国家自然科学基金(61272300, 61379072). 王 晶(1991—), 女, 硕士, 主要研究方向为计算机图形学; 蔺宏伟(1973—), 男, 博士, 副研究员, 博士生导师, CCF 会员, 论文通讯作者, 主要研究方向为几何设计; 王 潇(1991—), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为等几何分析; 卢兴江(1964—), 博士, 教授, 主要研究方向为几何计算.

可能无法进行. 事实上, 判断参数曲线曲面的正则性, 也是评价参数曲线曲面参数化质量的一个基本问题. 一个好的曲面参数化, 首先必须是正则的, 并且参数曲线网的分布尽可能均匀. 因而, 参数曲线曲面的正则性在计算机辅助设计中十分重要.

另一方面, 在网格生成中, 一般要求生成的网格不存在折叠区域, 这是由网格的正则性来保证的. 实际上, 评价网格质量的一个重要标准就是该网格的雅克比值, 而雅克比值等价于网格的法向量的模. 细分曲面, 尤其是 C-C 细分曲面, 是网格生成的重要手段, 因此, 有必要研究 C-C 细分曲面的正则性条件.

C-C 细分规则包含几何规则和拓扑规则<sup>[1]</sup>. 如图 1 所示, 几何规则首先为每一片四边面片生成一个新面点  $p_{11}^1$ ; 再为每一条边生成一个新边点  $p_{21}^1$ ; 最后为每一个网格顶点生成一个新顶点  $p_{22}^1$ . 拓扑规则规定了这些新面点、新边点和新顶点如何连接. 图 1 中新边点和它所在边相邻的 2 个面的新面点连接, 新顶点与它相邻的边上的新边点连接; 这样, 生成了细分一次后的网格.

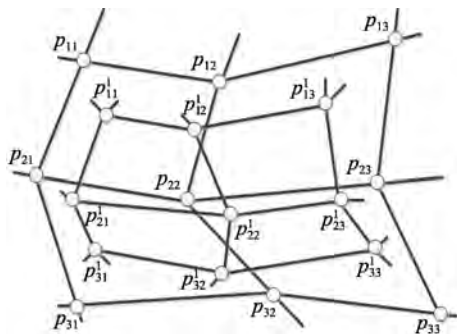


图 1 将控制网格细分一次

Ginkel 等<sup>[2]</sup>研究了 B 样条曲线和 Bézier 曲线切向量与初始控制网格切向量的关系, 其指出 B 样条曲线和 Bézier 曲线切向量包含在由初始控制网格切向量张成的锥体内, 并把结果推广到了有理 B 样条曲线和有理 Bézier 曲线. Ginkel 等<sup>[3]</sup>还研究了 Loop 细分曲面的正则性问题, 它与 B 样条曲线或 Bézier 曲线不同, Loop 细分曲面的法向量并不包含在初始控制网格法向量张成的锥体内, 文献<sup>[3]</sup>中给出了反例. 蔺宏伟等<sup>[4]</sup>研究了 Bézier 曲线曲面的正则性的判别条件, 并指出只要平面 Bézier 曲线的导矢曲线的结式不为 0, 这条平面 Bézier 曲线就是正则的. 另外, Xu 等<sup>[5]</sup>给出了 B 样条体无自交的条件.

本文主要针对内部点全为规则点、奇异点集中在边界上的控制网格, 研究它的 C-C 细分极限曲面的正则性条件.

## 1 差分向量的细分格式与特征分析

本文只分析内部网格点度为 4 的、边界可以有奇异点的初始网格. 考虑图 2 所示一个子网格, 按照 C-C 细分格式细分一次生成的网格如图 1 所示.

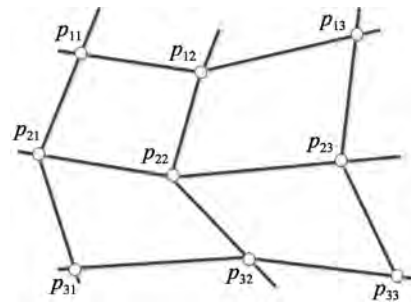


图 2 初始控制网格的子网格面片

### 1.1 前向差分向量

本节给出前向差分向量的定义, 并分析它的细分格式与特征分析, 最后给出在这种情况下 C-C 细分极限曲面的差分向量与初始控制网格差分向量之间的关系.

#### 1.1.1 定义

对于度为 4 的内部网格点  $p_{ij}$ , 可以定义 2 个方向的差分向量, 分别为  $u$  方向和  $v$  方向. 由于  $u$  和  $v$  方向的定义一样, 本文只考虑  $u$  方向的定义,  $v$  方向的定义同理可得.

设  $p_{ij}$  的前向差分向量为  $A_u(p_{ij})$ , 则  $A_u(p_{ij}) = p_{i, j+1} - p_{ij}$ ; 同理  $v$  方向  $p_{ij}$  的前向差分向量为  $A_v(p_{ij}) = p_{i+1, j} - p_{ij}$ .

#### 1.1.2 前向差分向量的细分格式

由于 C-C 细分的拓扑连接规则为: 新面点与新边点相连, 新顶点与新边点相连; 因此, 每一次细分后生成的新网格点的前向差分向量有图 1 所示如下 4 种形式:

1) 面点到边点的差分向量. 如图 1 中  $p_{11}^1 p_{12}^1$ . 由 C-C 细分几何规则知

$$p_{11}^1 = \frac{p_{11} + p_{12} + p_{21} + p_{22}}{4},$$

$$p_{12}^1 = \frac{p_{11}^1 + p_{13}^1}{4} + \frac{p_{12} + p_{22}}{4} =$$

$$\frac{p_{11} + 6p_{12} + p_{13} + p_{21} + 6p_{22} + p_{23}}{16};$$

因此

$$\begin{aligned}
 A_u(p_{11}^1) &= p_{12}^1 - p_{11}^1 = \\
 &= \frac{3(p_{12} - p_{11}) + (p_{13} - p_{12}) + 3(p_{22} - p_{21}) + (p_{23} - p_{22})}{16} = \\
 &= \frac{3}{16}(p_{12} - p_{11}) + \frac{1}{16}(p_{13} - p_{12}) + \frac{3}{16}(p_{22} - p_{21}) + \\
 &= \frac{1}{16}(p_{23} - p_{22}) = \left(0, 0, \frac{1}{16}, \frac{3}{16}, \frac{1}{16}, \frac{3}{16}\right) (p_{12} - p_{11}, p_{13} - \\
 &= p_{12}, p_{22} - p_{21}, p_{23} - p_{22}, p_{32} - p_{31}, p_{33} - p_{32})^T = \xi_1 \eta.
 \end{aligned}$$

其中,  $\xi_1 = \left(\frac{3}{16}, \frac{1}{16}, \frac{3}{16}, \frac{1}{16}, 0, 0\right)$  为  $1 \times 6$  的行向量;

$$\eta = (p_{12} - p_{11}, p_{13} - p_{12}, p_{22} - p_{21}, p_{23} - p_{22}, p_{32} - p_{31}, p_{33} - p_{32})^T \quad (1)$$

同理可得

$$\begin{aligned}
 A_u(p_{31}^1) &= \\
 &= \left(0, 0, \frac{3}{16}, \frac{1}{16}, \frac{3}{16}, \frac{1}{16}\right) (p_{12} - p_{11}, p_{13} - p_{12}, p_{22} - p_{21}, \\
 &= p_{23} - p_{22}, p_{32} - p_{31}, p_{33} - p_{32})^T = \xi_5 \eta,
 \end{aligned}$$

其中,  $\xi_5 = \left(0, 0, \frac{3}{16}, \frac{1}{16}, \frac{3}{16}, \frac{1}{16}\right)$  为  $1 \times 6$  的行向量;  $\eta$  如式(1)所示.

由上可知, 面点到边点的差分向量可以表示成初始网格差分向量的线性组合.

2) 边点到面点的差分向量. 如图 1 中  $p_{12}^1 p_{13}^1$ . 由 C-C 细分几何规则知

$$\begin{aligned}
 p_{13}^1 &= \frac{p_{12} + p_{13} + p_{22} + p_{23}}{4}, \\
 p_{12}^1 &= \frac{p_{11} + p_{13} + p_{12} + p_{22}}{4} = \\
 &= \frac{p_{11} + 6p_{12} + p_{13} + p_{21} + 6p_{22} + p_{23}}{16};
 \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
 A_u(p_{12}^1) &= p_{13}^1 - p_{12}^1 = \\
 &= \frac{1}{16}(p_{12} - p_{11}) + \frac{3}{16}(p_{13} - p_{12}) + \frac{1}{16}(p_{22} - p_{21}) + \\
 &= \frac{3}{16}(p_{23} - p_{22}) = \\
 &= \left(\frac{1}{16}, \frac{3}{16}, \frac{1}{16}, \frac{3}{16}, 0, 0\right) (p_{12} - p_{11}, p_{13} - p_{12}, p_{22} - \\
 &= p_{21}, p_{23} - p_{22}, p_{32} - p_{31}, p_{33} - p_{32})^T = \xi_2 \eta.
 \end{aligned}$$

其中,  $\xi_2 = \left(\frac{1}{16}, \frac{3}{16}, \frac{1}{16}, \frac{3}{16}, 0, 0\right)$  为  $1 \times 6$  的行向量;  $\eta$  如式(1)所示.

同理可得

$$\begin{aligned}
 A_u(p_{32}^1) &= \\
 &= \left(0, 0, \frac{1}{16}, \frac{3}{16}, \frac{1}{16}, \frac{3}{16}\right) (p_{12} - p_{11}, p_{13} - p_{12}, \\
 &= p_{22} - p_{21}, p_{23} - p_{22}, p_{32} - p_{31}, p_{33} - p_{32})^T = \xi_6 \eta;
 \end{aligned}$$

其中,  $\xi_6 = \left(0, 0, \frac{1}{16}, \frac{3}{16}, \frac{1}{16}, \frac{3}{16}\right)$  为  $1 \times 6$  的行向量;  $\eta$  如式(1)所示.

由上可知, 边点到面点的差分向量也可以表示成初始网格差分向量的线性组合.

3) 边点到新顶点的差分向量. 如图 1 中  $p_{21}^1 p_{22}^1$ . 由 C-C 细分几何规则知

$$\begin{aligned}
 p_{21}^1 &= \frac{p_{11} + 6p_{21} + p_{31} + p_{12} + 6p_{22} + p_{32}}{16}, \\
 p_{22}^1 &= \\
 &= \frac{\frac{p_{11} + p_{13} + p_{31} + p_{33}}{8} + \frac{p_{22}}{2} + \frac{p_{12} + p_{21} + p_{23} + p_{32} + 4p_{22}}{8}}{2} = \\
 &= \frac{p_{11} + 6p_{12} + p_{13} + 6p_{21} + 36p_{22} + 6p_{23} + p_{31} + 6p_{32} + p_{33}}{64};
 \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
 A_u(p_{21}^1) &= p_{22}^1 - p_{21}^1 = \\
 &= \frac{1}{64}[(3(p_{12} - p_{11}) + (p_{13} - p_{12}) + 18(p_{22} - p_{21}) + \\
 &= 6(p_{23} - p_{22}) + 3(p_{32} - p_{31}) + (p_{33} - p_{32})] = \\
 &= \left(\frac{3}{64}, \frac{1}{64}, \frac{18}{64}, \frac{6}{64}, \frac{3}{64}, \frac{1}{64}\right) (p_{12} - p_{11}, p_{13} - p_{12}, \\
 &= p_{22} - p_{21}, p_{23} - p_{22}, p_{32} - p_{31}, p_{33} - p_{32})^T = \xi_3 \eta.
 \end{aligned}$$

其中,  $\xi_3 = \left(\frac{3}{64}, \frac{1}{64}, \frac{18}{64}, \frac{6}{64}, \frac{3}{64}, \frac{1}{64}\right)$  为  $1 \times 6$  的行向量;  $\eta$  如式(1)所示.

由上可知, 边点到新顶点的差分向量也可以表示成初始网格差分向量的线性组合.

4) 新顶点到边点的差分向量. 如图 1 中  $p_{22}^1 p_{23}^1$ . 由 C-C 细分几何规则知

$$p_{23}^1 = \frac{p_{12} + 6p_{22} + p_{32} + p_{13} + 6p_{23} + p_{33}}{16};$$

因此点  $p_{22}^1$  处的前向差分向量

$$\begin{aligned}
 A_u(p_{22}^1) &= p_{23}^1 - p_{22}^1 = \\
 &= \frac{1}{64}[(p_{12} - p_{11}) + 3(p_{13} - p_{12}) + 6(p_{22} - p_{21}) + \\
 &= 18(p_{23} - p_{22}) + (p_{32} - p_{31}) + 3(p_{33} - p_{32})] = \\
 &= \left(\frac{1}{64}, \frac{3}{64}, \frac{6}{64}, \frac{18}{64}, \frac{1}{64}, \frac{3}{64}\right) (p_{12} - p_{11}, p_{13} - p_{12}, \\
 &= p_{22} - p_{21}, p_{23} - p_{22}, p_{32} - p_{31}, p_{33} - p_{32})^T = \xi_4 \eta.
 \end{aligned}$$



由于  $\mathcal{A}_u(p_{ij}^n) = \xi_k S^{n-1} \eta, k=1, \dots, 6$ , 而  $\xi_k$  的每个分量为 0~1 的数, 且分量和为 0.5;  $S_1^\infty$  的每个分量也为 0~1 的数, 因此前向差分向量收敛到  $\omega_k$ , 其中  $\omega_k$  为  $1 \times 6$  行向量, 且每个分量为 0~1 的值.  $\eta$  如式(1)所示, 为初始网格的前向差分向量.

下面讨论极限曲面正则性的条件. 由上可知, 由于极限曲面的差分向量可表示为  $\xi_i S_1^\infty \eta$ , 而  $\xi_i S_1^\infty$  为行向量, 且每个数值在 0~1, 因此, 极限曲面的  $u, v$  方向差分向量分别收敛到初始网格  $u, v$  方向的差分向量的线性组合. 如果初始网格  $u, v$  方向差分向量所张成的锥体不相交, 那么极限曲面  $u, v$  方向的差分向量的叉积(即为细分极限曲面在此点的法向量)不为 0. 由此可得如下定理:

定理 1. C-C 细分极限曲面每一点处的前向差分向量可以表示成初始网格前向差分向量的线性组合, 且组合系数为 0~1 的值, 即  $\mathcal{A}_u(p_{ij}^\infty) = \xi_k S_1^\infty \eta = \omega_k \eta$  其中,  $\omega_k$  为  $1 \times 6$  行向量, 且每个分量为 0~1 的值,  $k=1, \dots, 6$ .

### 1.2 中心差分向量

本节给出中心差分向量的定义, 并给出它的细分格式与特征分析, 最后指出在这种情况下 C-C 细分极限曲面的差分向量与原始控制网格差分向量之间的关系. 给定一个图 3 所示初始子网格, 按照 C-C 细分格式细分一次后如图 4 所示.

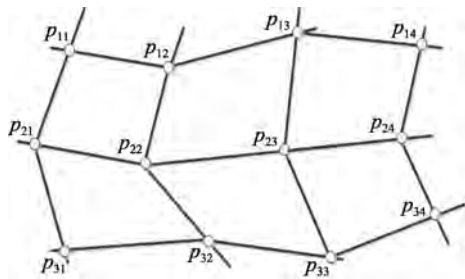


图 3 初始控制网格的一片子网格

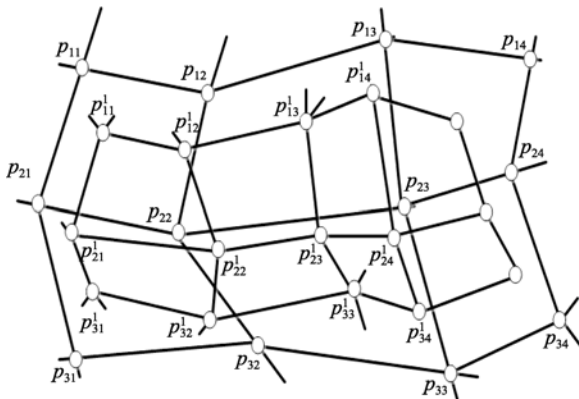


图 4 C-C 细分一次之后的网格

#### 1.2.1 定义

如图 3 和图 4 所示, 对于度为 4 的网格点  $p_{ij}$ , 可以定义 2 个方向的中心差分向量, 分别为  $u$  方向和  $v$  方向. 由于  $u, v$  方向的定义一样, 这里只考虑  $u$  方向的定义,  $v$  方向的定义同理可得.

设  $p_{ij}$  的中心差分向量为  $\delta_u(p_{ij})$ , 则

$$\delta_u(p_{ij}) = p_{i,j+1} - p_{i,j-1};$$

同理  $v$  方向  $p_{ij}$  的中心差分向量为

$$\delta_v(p_{ij}) = p_{i+1,j} - p_{i-1,j}.$$

#### 1.2.2 中心差分向量的细分格式

由中心差分向量的定义, 可以按网格点分为面点、边点和新顶点对应的中心差分向量. 下面给出这 3 种点的差分向量细分格式.

1) 面点对应的中心差分向量. 由 C-C 细分的拓扑连接规则可知与面点相连的为边点, 因此面点处的中心差分为边点到边点, 如图 4 中的点  $p_{13}^1$ ,

$$\begin{aligned} \delta_u(p_{13}^1) &= p_{14}^1 - p_{12}^1 = \\ &= \frac{p_{12} + 6p_{13} + p_{14} + p_{22} + 6p_{23} + p_{24}}{16} - \\ &= \frac{1}{16}(p_{12} - p_{11}) + \frac{6}{16}(p_{13} - p_{12}) + \\ &= \frac{1}{16}(p_{14} - p_{13}) + \frac{1}{16}(p_{22} - p_{21}) + \\ &= \frac{6}{16}(p_{23} - p_{22}) + \frac{1}{16}(p_{24} - p_{23}) = \\ &= \left( \frac{1}{16}, \frac{6}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{6}{16}, \frac{1}{16}, 0, 0, 0 \right) \times \\ &= (\mathcal{A}_u(p_{11}), \mathcal{A}_u(p_{12}), \mathcal{A}_u(p_{13}), \mathcal{A}_u(p_{21}), \mathcal{A}_u(p_{22}), \\ &= \mathcal{A}_u(p_{23}), \mathcal{A}_u(p_{31}), \mathcal{A}_u(p_{32}), \mathcal{A}_u(p_{33}))^T = \alpha_1 \gamma; \end{aligned}$$

它的中心差分向量为

其中,  $\alpha_1 = \left( \frac{1}{16}, \frac{6}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{6}{16}, \frac{1}{16}, 0, 0, 0 \right)$  为  $1 \times 9$  的行向量;

$$\begin{aligned} \gamma &= (\mathcal{A}_u(p_{11}), \mathcal{A}_u(p_{12}), \mathcal{A}_u(p_{13}), \mathcal{A}_u(p_{21}), \mathcal{A}_u(p_{22}), \\ &= \mathcal{A}_u(p_{23}), \mathcal{A}_u(p_{31}), \mathcal{A}_u(p_{32}), \mathcal{A}_u(p_{33}))^T \end{aligned} \quad (2)$$

2) 边点对应的中心差分向量. 由 C-C 细分的拓扑连接规则可知与边点相连的有面点和新顶点, 因此边点处的中心差分为面点到面点的差分向量, 如图 4 中的点  $p_{12}^1$ ; 新顶点到新顶点的差分向量如图 4 中的点  $p_{23}^1$ . 首先讨论点  $p_{12}^1$  的中心差分向量

$$\begin{aligned} \delta_u(p_{12}^1) &= p_{13}^1 - p_{11}^1 = \\ &= \frac{p_{12} + p_{13} + p_{22} + p_{23}}{4} - \frac{p_{11} + p_{12} + p_{21} + p_{22}}{4} = \\ &= \frac{1}{4}(p_{12} - p_{11}) + \frac{1}{4}(p_{13} - p_{12}) + \frac{1}{4}(p_{22} - p_{21}) + \frac{1}{4}(p_{23} - p_{22}) = \\ &= \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0, 0, 0\right) \times (\mathbf{A}_u(p_{11}), \mathbf{A}_u(p_{12}), \mathbf{A}_u(p_{13}), \mathbf{A}_u(p_{21}), \\ &\quad \mathbf{A}_u(p_{22}), \mathbf{A}_u(p_{23}), \mathbf{A}_u(p_{31}), \mathbf{A}_u(p_{32}), \mathbf{A}_u(p_{33}))^T = \alpha_2 \gamma. \end{aligned}$$

其中,  $\alpha_2 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0, 0, 0\right)$  为  $1 \times 9$  的行向量;  $\gamma$  如式(2)所示.

同理有点  $p_{23}^1$  的中心差分向量

$$\begin{aligned} \delta_u(p_{23}^1) &= p_{24}^1 - p_{22}^1 = \\ &= \frac{p_{12} + 6p_{13} + p_{14} + 6p_{22} + 36p_{23} + 6p_{24} + p_{32} + 6p_{33} + p_{34}}{64} - \\ &= \frac{p_{11} + 6p_{12} + p_{13} + 6p_{21} + 36p_{22} + 6p_{23} + p_{31} + 6p_{32} + p_{33}}{64} = \\ &= \frac{1}{64}(p_{12} - p_{11}) + \frac{6}{64}(p_{13} - p_{12}) + \frac{1}{64}(p_{14} - p_{13}) + \\ &= \frac{6}{64}(p_{22} - p_{21}) + \frac{36}{64}(p_{23} - p_{22}) + \frac{6}{64}(p_{24} - p_{23}) + \\ &= \frac{1}{64}(p_{32} - p_{31}) + \frac{6}{64}(p_{33} - p_{32}) + \frac{1}{64}(p_{34} - p_{33}) = \\ &= \left(\frac{1}{64}, \frac{6}{64}, \frac{1}{64}, \frac{6}{64}, \frac{36}{64}, \frac{6}{64}, \frac{1}{64}, \frac{6}{64}, \frac{1}{64}\right) \times (\mathbf{A}_u(p_{11}), \\ &\quad \mathbf{A}_u(p_{12}), \mathbf{A}_u(p_{13}), \mathbf{A}_u(p_{21}), \mathbf{A}_u(p_{22}), \mathbf{A}_u(p_{23}), \\ &\quad \mathbf{A}_u(p_{31}), \mathbf{A}_u(p_{32}), \mathbf{A}_u(p_{33}))^T = \alpha_3 \gamma. \end{aligned}$$

其中,  $\alpha_3 = \left(\frac{1}{64}, \frac{6}{64}, \frac{1}{64}, \frac{6}{64}, \frac{36}{64}, \frac{6}{64}, \frac{1}{64}, \frac{6}{64}, \frac{1}{64}\right)$  为  $1 \times 9$  的行向量;  $\gamma$  如式(2)所示.

3) 新顶点对应的中心差分向量. 由 C-C 细分的拓扑连接规则可知与新顶点相连的为边点, 因此新顶点处的中心差分为边点到边点的差分向量, 如图 4 中的点  $p_{22}^1$ , 它的中心差分向量为

$$\begin{aligned} \delta_u(p_{22}^1) &= p_{23}^1 - p_{21}^1 = \\ &= \frac{p_{12} + 6p_{22} + p_{32} + p_{13} + 6p_{23} + p_{33}}{16} - \\ &= \frac{p_{11} + 6p_{21} + p_{31} + p_{12} + 6p_{22} + p_{32}}{16} = \\ &= \frac{1}{16}(p_{12} - p_{11}) + \frac{1}{16}(p_{13} - p_{12}) + \frac{6}{16}(p_{22} - p_{21}) + \\ &= \frac{6}{16}(p_{23} - p_{22}) + \frac{1}{16}(p_{32} - p_{31}) + \frac{1}{16}(p_{33} - p_{32}) = \\ &= \left(\frac{1}{16}, \frac{1}{16}, 0, \frac{6}{16}, \frac{6}{16}, 0, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, 0\right) \times (\mathbf{A}_u(p_{11}), \mathbf{A}_u(p_{12}), \\ &\quad \mathbf{A}_u(p_{13}), \mathbf{A}_u(p_{21}), \mathbf{A}_u(p_{22}), \mathbf{A}_u(p_{23}), \mathbf{A}_u(p_{31}), \mathbf{A}_u(p_{32}), \\ &\quad \mathbf{A}_u(p_{33}))^T = \alpha_4 \gamma. \end{aligned}$$

其中,  $\alpha_4 = \left(\frac{1}{16}, \frac{1}{16}, 0, \frac{6}{16}, \frac{6}{16}, 0, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, 0\right)$  为  $1 \times 9$  的行向量;  $\gamma$  如式(2)所示.

上面分析了初始网格细分一次之后的中心差分向量的 3 种形式, 下面讨论细分  $n$  次之后中心差分向量.

1) 面点的中心差分向量细分格式. 2 次细分之后, 由之前的结论可得

$$\begin{aligned} \delta_u(p_{13}^2) &= \left(\frac{1}{16}, \frac{6}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{6}{16}, \frac{1}{16}, 0, 0, 0\right) \times \\ &= (\mathbf{A}_u(p_{11}), \mathbf{A}_u(p_{12}), \mathbf{A}_u(p_{13}), \mathbf{A}_u(p_{21}), \mathbf{A}_u(p_{22}), \\ &\quad \mathbf{A}_u(p_{23}), \mathbf{A}_u(p_{31}), \mathbf{A}_u(p_{32}), \mathbf{A}_u(p_{33}))^T = \\ &= \left(\frac{1}{16}, \frac{6}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{6}{16}, \frac{1}{16}, 0, 0, 0\right) \cdot \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{16} & \frac{1}{16} & 0 & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{16} & \frac{3}{16} & 0 & \frac{1}{16} & \frac{3}{16} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} & 0 & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{64} & \frac{1}{64} & 0 & \frac{18}{64} & \frac{6}{64} & 0 & \frac{3}{64} & \frac{1}{64} & 0 \\ \frac{1}{64} & \frac{3}{64} & 0 & \frac{6}{64} & \frac{18}{64} & 0 & \frac{1}{64} & \frac{3}{64} & 0 \\ 0 & \frac{3}{64} & \frac{1}{64} & 0 & \frac{18}{64} & \frac{6}{64} & 0 & \frac{3}{64} & \frac{1}{64} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} & 0 & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16} & \frac{3}{16} & 0 & \frac{1}{16} & \frac{3}{16} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} & 0 & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_u(p_{11}) \\ \mathbf{A}_u(p_{12}) \\ \mathbf{A}_u(p_{13}) \\ \mathbf{A}_u(p_{21}) \\ \mathbf{A}_u(p_{22}) \\ \mathbf{A}_u(p_{23}) \\ \mathbf{A}_u(p_{31}) \\ \mathbf{A}_u(p_{32}) \\ \mathbf{A}_u(p_{33}) \end{pmatrix} = \alpha_1 \mathbf{S}_9 \gamma;$$

其中  $\mathbf{S}_9$  为上述  $9 \times 9$  方阵.

由此, 得到了面点的中心差分向量细分格式.

2) 边点的中心差分向量细分格式. 由上述结论

同理可得  $\delta_u(p_{12}^n) = \alpha_2 S_9^{n-1} \gamma, \delta_u(p_{23}^n) = \alpha_3 S_9^{n-1} \gamma$ .

由此, 得到了边点的中心差分向量细分格式.

3) 新顶点的中心差分向量细分格式. 由上述

结论同理可得  $\delta_u(p_{22}^n) = \alpha_4 S_9^{n-1} \gamma$ .

由此, 得到了新顶点的中心差分向量细分格式.

### 1.2.3 特征分析与正则性条件讨论

由第 1.2.2 节的讨论可知, 细分矩阵

$$S = \begin{pmatrix} \frac{3}{16} & \frac{1}{16} & 0 & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{16} & \frac{3}{16} & 0 & \frac{1}{16} & \frac{3}{16} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} & 0 & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{64} & \frac{1}{64} & 0 & \frac{18}{64} & \frac{6}{64} & 0 & \frac{3}{64} & \frac{1}{64} & 0 \\ \frac{1}{64} & \frac{3}{64} & 0 & \frac{6}{64} & \frac{18}{64} & 0 & \frac{1}{64} & \frac{3}{64} & 0 \\ 0 & \frac{3}{64} & \frac{1}{64} & 0 & \frac{18}{64} & \frac{6}{64} & 0 & \frac{3}{64} & \frac{1}{64} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} & 0 & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16} & \frac{3}{16} & 0 & \frac{1}{16} & \frac{3}{16} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} & 0 & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix},$$

由于本文只对差分向量的方向进行分析, 并不考虑它的模长, 因此可以把它扩大二倍考虑, 即把细分矩阵扩大 2 倍为  $S_1 = 2S$ . 将  $S_1$  进行对角化可得

$$S_1 = P \hat{S}_1 P^{-1}. \text{ 其中,}$$

$$\hat{S}_1 = \text{diag}(1, 0.25, 0.625, 0.5, 0.125, 0.5, 0.125, 0.25, 0.25)$$

为对角矩阵; 对角线上元素为矩阵  $S_1$  的特征值;

$P =$

$$\begin{pmatrix} -0.3333 & -0.3169 & 0.0000 & -0.4288 & 0.1529 & 0.0885 & 0.0192 & -0.1015 & 0.1204 \\ -0.3333 & 0.0634 & -0.0000 & -0.2144 & -0.1529 & 0.3751 & -0.0192 & -0.2497 & 0.2885 \\ -0.3333 & 0.3169 & 0.6667 & 0.0000 & 0.0000 & 0.6617 & -0.7614 & 0.1709 & 0.7992 \\ -0.3333 & 0.0634 & -0.0000 & -0.1072 & -0.0765 & -0.1433 & -0.0096 & 0.0878 & -0.1022 \\ -0.3333 & 0.0634 & -0.0000 & 0.1072 & 0.0765 & 0.1433 & 0.0096 & 0.0878 & -0.1022 \\ -0.3333 & -0.0634 & -0.3333 & 0.3216 & 0.2294 & 0.4299 & 0.0288 & 0.6566 & 0.2405 \\ -0.3333 & 0.0634 & 0.0000 & 0.2144 & 0.1529 & -0.3751 & 0.0192 & -0.2497 & 0.2885 \\ -0.3333 & -0.3169 & -0.0000 & 0.4288 & -0.1529 & -0.0885 & -0.0192 & -0.1015 & 0.1204 \\ -0.3333 & -0.8238 & 0.6667 & 0.6433 & -0.9177 & 0.1981 & 0.6464 & 0.6156 & 0.2950 \end{pmatrix}$$

为  $S_1$  的特征向量. 考虑细分  $n$  次, 有  $S_1^n = P \hat{S}_1^n P^{-1}$ . 令  $n \rightarrow \infty$ , 则细分矩阵收敛到

$$S_1^\infty = P \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & 0 & & & & & & & \\ & & 0 & & & & & & \\ & & & 0 & & & & & \\ & & & & 0 & & & & \\ & & & & & 0 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} P^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 0.0833 & 0.0833 & 0.0000 & 0.3333 & 0.3333 & 0.0000 & 0.0833 & 0.0833 & 0.0000 \\ 0.0833 & 0.0833 & 0.0000 & 0.3333 & 0.3333 & 0.0000 & 0.0833 & 0.0833 & 0.0000 \\ 0.0833 & 0.0833 & 0.0000 & 0.3333 & 0.3333 & 0.0000 & 0.0833 & 0.0833 & 0.0000 \\ 0.0833 & 0.0833 & 0.0000 & 0.3333 & 0.3333 & 0.0000 & 0.0833 & 0.0833 & 0.0000 \\ 0.0833 & 0.0833 & 0.0000 & 0.3333 & 0.3333 & 0.0000 & 0.0833 & 0.0833 & 0.0000 \\ 0.0833 & 0.0833 & 0.0000 & 0.3333 & 0.3333 & 0.0000 & 0.0833 & 0.0833 & 0.0000 \\ 0.0833 & 0.0833 & 0.0000 & 0.3333 & 0.3333 & 0.0000 & 0.0833 & 0.0833 & 0.0000 \\ 0.0833 & 0.0833 & 0.0000 & 0.3333 & 0.3333 & 0.0000 & 0.0833 & 0.0833 & 0.0000 \\ 0.0833 & 0.0833 & 0.0000 & 0.3333 & 0.3333 & 0.0000 & 0.0833 & 0.0833 & 0.0000 \end{pmatrix}$$

由于  $\delta_u(p_{ij}^n) = \alpha_k S^{n-1} \gamma, k=1, \dots, 4$ , 而  $\alpha_k$  的每个分量为 0~1 的数, 且分量和为 1,  $S_1^\infty$  的每个分量也为 0~1 的数, 因此中心差分向量收敛到  $\omega_k \gamma$ , 其中  $\omega_k$  为  $1 \times 9$  行向量, 且每个分量为 0~1 的值.  $\gamma$  如式(2)所示, 为初始网格的前向差分向量.

下面讨论极限曲面正则性的条件. 因为极限曲面的差分向量可表示为  $\alpha_k S_1^\infty \gamma$ , 而  $\alpha_k S_1^\infty$  为列向量, 且每个数值在 0~1, 所以, 极限曲面的  $u, v$  方向差分向量分别收敛到初始网格  $u, v$  方向的差分向量的线性组合. 如果初始网格  $u, v$  方向差分向量所张成的锥体不相交, 那么极限曲面  $u, v$  方向的差分向量叉积(即为细分极限曲面此点的法向量)不为 0. 由此可得如下定理:

定理 2. C-C 细分极限曲面每一点处的中心差分向量可以表示成初始网格前向差分向量的线性组合, 且组合系数为 0~1 的值.

### 1.3 后向差分向量

设  $p_{ij}$  的后向差分向量为  $\nabla_u(p_{ij})$ , 则

$$\nabla_u(p_{ij}) = p_{i,j} - p_{i-1,j} = \Delta_u(p_{i-1,j}),$$

即可以表示成前向差分向量的形式, 因此结论与前向和中心差分向量类似.

综合定理 1 和定理 2, 可以得到判别 C-C 细分极限曲面正则性的一个充分条件.

定理 3. 如果初始控制网格  $u, v$  方向前向差分向量张成的锥体不相交, 则 C-C 细分极限曲面是正则的.

## 2 实验结果

本节利用前面的定理来判定由 C-C 细分生成的平面网格的正则性. 图 5~7 中, 分别用红色和蓝色  $v$  和  $u$  方向的前向差分向量张成区域.

图 5 所示为机械零件剖面网格模型及其  $u, v$  方向前向差分向量形成的锥体(退化为扇形区域). 从图 5b 可以看出,  $u, v$  方向差分向量张成的扇形区域不相交, 满足定理中的条件, 因此它的 C-C 细分极限曲面是正则的. 图 5c 为细分一次之后的网格, 图 5d 为对应的  $u, v$  方向的差分向量形成的扇形区域的边界, 可见它们是不相交的, 从而验证了细分一次之后的网格是正则的.

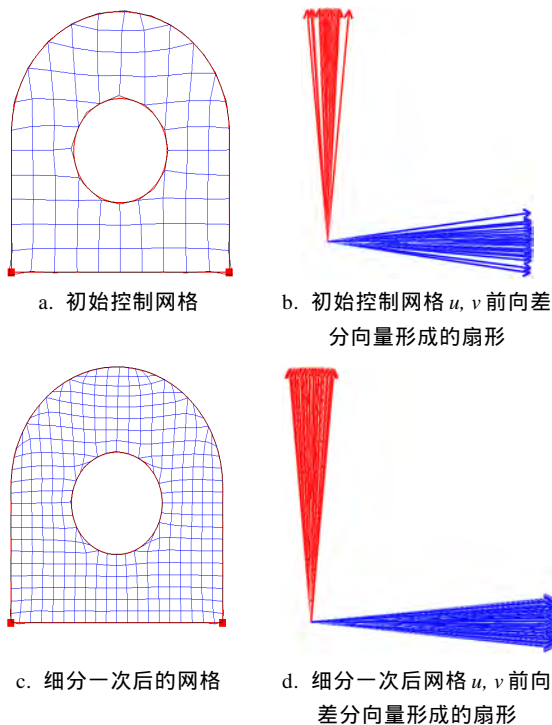


图 5 零件剖面网格及网格  $u, v$  前向差分向量形成扇形

图 6 所示为海豚模型网格. 从图 6b 可以看出,  $u, v$  方向前向差分向量张成的扇形区域不相交, 因此满足定理 3 中的条件. 图 6a 所示海豚网格模型为初始控制网格生成的 C-C 细分曲面是正则的; 图 6d, 6f 所示的  $u, v$  方向前向差分向量张成的扇形区域不相交, 证明了相应的细分曲面的正则性.

图 7 所示为蝴蝶网格模型. 从图 7b 可以看出,  $u, v$  方向前向差分向量张成的扇形区域不相交, 满足定理 3 中的条件, 因此生成的 C-C 细分曲面是正则的, 如图 7c~7d 所示.

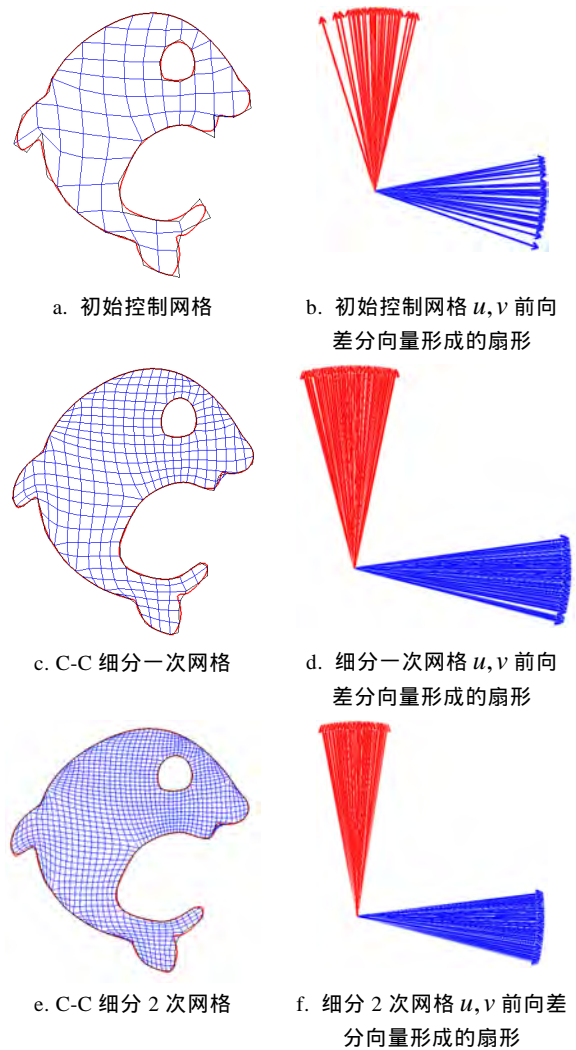


图 6 海豚模型及网格  $u, v$  前向差分向量形成扇形

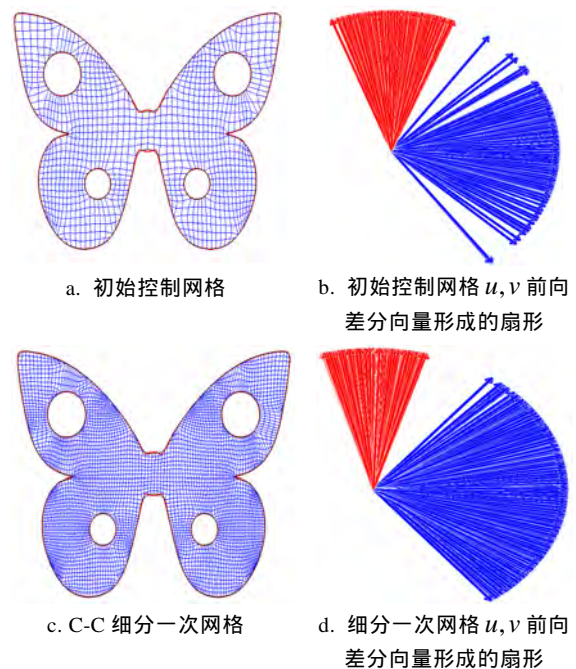


图 7 蝴蝶模型及网格  $u, v$  前向差分向量形成的扇形



### 3 总结与展望

对于奇异点全在边界、内部点全为规则点的初始四边网格, 本文研究了它的 C-C 细分极限曲面的正则性. 通过对差向量细分矩阵的特征分析, 推导了 C-C 细分曲面正则性的一个充分条件. 利用这个条件, 可以生成正则的平面四边网格. 不仅如此, 它对于细分曲面的工程化应用, 也将起到一定的作用. 可以看到, 本文推导的 C-C 细分曲面正则性的充分条件比较严格, 下一步将通过深入分析细分矩阵的特征性质, 研究更加简便易用的 C-C 细分曲面正则条件.

### 参考文献(References):

- [1] Catmull E, Clark J. Recursively generated B-spline surfaces on arbitrary topological meshes[J]. *Computer-Aided Design*, 1978, 10(6): 350-355
- [2] Ginkel I, Peters J, Umlauf G. On normals and control nets[M] // *Lecture Notes in Computer Science*. Heidelberg : Springer, 2005, 3064: 233-239
- [3] Ginkel I, Peters J, Umlauf G. Normals of subdivision surfaces and their control polyhedra[J]. *Computer Aided Geometric Design*, 2007, 24(2): 112-116
- [4] Lin Hongwei, Wang Qing, Bao Hujun. Conditions for determining the regularity of Bézier curve and surface[J]. *Journal of Software*, 2006, 17(3): 516-524(in Chinese)  
(简宏伟, 王 青, 鲍虎军. Bézier 曲线曲面正则性的判别条件[J]. *软件学报*, 2006, 17(3): 516-524)
- [5] Xu G, Mourrain B, Duvigneau R, *et al.* Optimal analysis-aware parameterization of computational domain in 3D isogeometric analysis[J]. *Computer-Aided Design*, 2013, 45(4): 812-821