几何迭代法及其应用综述

蔺宏伟

(浙江大学数学系 杭州 310058)
(浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室 杭州 310058)
(hwlin@zju.edu.cn)

摘 要: 几何迭代法, 又称渐进迭代逼近(progressive-iterative approximation, PIA), 是一种具有明显几何意义的迭代方法. 它通过不断调整曲线曲面的控制顶点, 生成的极限曲线曲面插值(逼近)给定的数据点集. 文中从理论和应用 2 个方面对几何迭代法进行了综述. 在理论方面, 介绍了插值型几何迭代法的迭代格式、收敛性证明、局部性质、加速方法, 以及逼近型几何迭代法的迭代格式和收敛性证明等. 进而,展示了几何迭代法在几个方面的成功应用, 包括自适应数据拟合、大规模数据拟合、对称曲面拟合, 以及插值给定位置、切矢量和曲率矢量的曲线迭代生成, 有质量保证的四边网格和六面体网格生成, 三变量 B-spline 体的生成等.

关键词: 渐进迭代逼近; 几何迭代法; 数据拟合; 几何设计
中图法分类号: TP391

Survey on Geometric Iterative Methods with Applications

Lin Hongwei

(*Department of Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou,* 310058)
(*State Key Laboratory of CAD &CG, Zhejiang University, Hangzhou,* 310058)

Abstract: Geometric iterative method, also called progressive-iterative approximation (PIA), is an iterative method with clear geometric meaning. Just by adjusting the control points of curves or surfaces iteratively, the limit curve or surface will interpolate (approximate) the given data point set. In this paper, we introduce the geometric iterative method in two aspects, i.e., theory and application. In theory, we present the iterative formats of the interpolatory and approximating geometric iteration methods, respectively, show their convergence and local property, and develop the accelerating techniques. Moreover, some successful applications of the geometric iterative methods are demonstrated, including adaptive data fitting, large scale data fitting, symmetric surface fitting, generation of the curve interpolating given positions, tangent vectors, and curvature vectors, generation of the quadrilateral and hexahedral mesh with guaranteed quality, and generation of the trivariate B-spline solid, etc.

Key words: Progressive-Iterative Approximation; Geometric Iterative Methods; Data Fitting; Geometric Design

几何迭代法 是一种具有明显几何意义的迭代方法. 从一条初始混合曲线开始, 通过迭代调整它的控制顶点, 就可以使这条曲线插值或逼近给定的数据点列. 由于几何迭代法的迭代过程具有明显的几何意义, 在迭代的每一步, 可以很容易地加入各种几何约束条件, 使得几何迭代法生成的极限曲线曲面满足这些约束. 由于几何迭代法的这一性质, 近年来, 它在几何设计及相关领域得到了成功地应用, 包括自适应数据拟合, 大规模数据拟合, 对称曲面拟合, 插值给定位置、切矢量和曲率

收稿日期：2015-03-15; 修回日期：2015-03-27. 基金项目：国家自然科学基金(61379072). 蔺宏伟(1973—), 男, 博士, 副研究员, 主要研究方向为几何设计与计算.

矢量的曲线迭代生成, 有质量保证的四边网格和六面体网格生成, 三变量 B-spline 体的生成等.

几何迭代法肇始于 1975 年由齐东旭等学者提出的均匀 3 次 B 样条曲线的盈亏修正算法[1], 1979 年, de Boor 也独立证明了这一算法的收敛性[2]. 2004 年, Lin 等证明了非均匀 3 次 B 样条曲线曲面的盈亏修正性质[3]; 2006 年, 又证明了所有全正基混合曲线曲面都具有这一性质, 并创造了英文术语 progressive-iterative approximation(PIA: 渐进迭代逼近)来描述这一方法[4]. 在 PIA 算法中, 每一个数据点对应的参数值在迭代中是固定不变的. 2007 年, 日本学者 Maekawa 等[5]将数据点的参数值取为每次迭代生成的拟合曲线曲面上最近点的参数值, 并命名为 geometric interpolation(GI)[5-7]. 由于 PIA 和 GI 算法迭代步骤类似, 都具有明显的几何意义, 我们将这些具有明显几何意义的迭代法统称为几何迭代法.

本文对几何迭代法的理论和应用进行了综述.

1 插值型几何迭代算法

本节综述了几何设计中常用的几种曲线曲面的插值型几何迭代算法, 包括全正基混合曲线曲面, NURBS 曲线曲面, 三角 Bernstein-Bézier(B-B) 曲线曲面, 以及细分曲线曲面等; 同时还介绍了几何迭代法的加速技术和局部性质.

1.1 全正基混合曲线曲面的插值型几何迭代算法

给定一个点列$\{\boldsymbol{Q}_i, i=0, 1,\cdots,n\}$, 其中每一个点$\boldsymbol{Q}_i$赋予一个参数值 t_i, $i=0, 1, \cdots, n$, 满足

$$t_0<t_1<\cdots<t_n.$$

以这个点列为初始控制点列, 构造一条初始混合曲线 $\boldsymbol{P}^{(0)}(t)=\sum_{i=0}^{n}\boldsymbol{P}_i^{(0)}B_i(t)$; 这里, $\boldsymbol{P}_i^{(0)}=\boldsymbol{Q}_i$, $B_i(t)$为基函数, $i=0, 1, \cdots, n$. 假设第 k 次迭代后生成的第 k 次曲线为

$$\boldsymbol{P}^{(k)}(t)=\sum_{i=0}^{n}\boldsymbol{P}_i^{(k)}B_i(t).$$

为进行第 k+1 次迭代, 首先计算差向量

$$\boldsymbol{\varDelta}_i^{(k)}=\boldsymbol{Q}_i-\boldsymbol{P}^{(k)}(t_i),\quad i=0, 1,\cdots, n;$$

然后, 将其加到曲线 $\boldsymbol{P}^{(k)}(t)$的相应控制顶点上, 即

$$\boldsymbol{P}_i^{(k+1)}=\boldsymbol{P}_i^{(k)}+\boldsymbol{\varDelta}_i^{(k)},\quad i=0, 1,\cdots, n;$$

从而生成了第 k+1 次曲线

$$\boldsymbol{P}^{(k+1)}(t)=\sum_{i=0}^{n}\boldsymbol{P}_i^{(k+1)}B_i(t).$$

这个过程迭代进行, 产生了一个曲线序列

$$\{\boldsymbol{P}^{(k)}(t), k=0, 1, 2,\cdots\}.$$

对于混合曲面(张量积曲面), 也可以类似生成这样一个曲面序列[3-4].

记

$$\boldsymbol{\varDelta}^{(k)}=[\boldsymbol{\varDelta}_1^{(k)}, \boldsymbol{\varDelta}_2^{(k)},\cdots\boldsymbol{\varDelta}_n^{(k)}]^{\mathrm{T}} \tag{1}$$

则式(1)矩阵形式[3-4]为

$$\boldsymbol{\varDelta}^{(k+1)}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C})\boldsymbol{\varDelta}^{(k)};$$

其中, $\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵,

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} B_0(t_0) & B_1(t_0) & \cdots & B_n(t_0)\\ B_0(t_1) & B_1(t_1) & \cdots & B_n(t_1)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ B_0(t_n) & B_1(t_n) & \cdots & B_n(t_n)\end{bmatrix}$$

为基函数的配置矩阵.

文献[3]中证明了当混合曲线曲面的基函数是非均匀 3 次 B 样条基函数时, 这个曲线曲面序列收敛到插值于给定点列的曲线曲面, 即

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{P}^{(k)}(t_i)=\boldsymbol{Q}_i,\ i=0,1\cdots,n;$$

这称为混合曲线曲面的渐进迭代逼近(PIA)性质. 进一步, 文献[4]中证明了只要基函数是全正基函数, 这个曲线曲面序列就有渐进迭代逼近性质. 由于 Bernstein 基函数和 B 样条基函数都是全正基函数, 因而 Bézier 曲线曲面、B 样条曲线曲面都具有渐进迭代逼近性质. 特别地, 当混合曲线为周期均匀 B 样条曲线时, 几何迭代的极限曲线表达式可以直接求出[8]. 另外, 文献[9]给出了渐进迭代的拟合误差估计公式. 给定不同的拟合精度以及不同的初始数据参数化, 利用拟合误差估计公式可以预估迭代次数.

1.2 NURBS 曲线曲面的插值型几何迭代算法

我们首先构造 NURBS 曲线的几何迭代算法, NURBS 曲面的几何迭代算法可以类似构造. NURBS 曲线在射影空间中的齐次形式为

$$\boldsymbol{R}(t)=\sum_{i=0}^{n}\boldsymbol{R}_iB_i(t);$$

其中, $\boldsymbol{R}_i=(w_i\boldsymbol{P}_i, w_i)=(w_ix_i, w_iy_i, w_iz_i, w_i)$, $i=0, 1,\cdots, n$; w_i 为权因子, $\boldsymbol{P}_i=(x_i, y_i, z_i)$为欧氏空间的一个点, $B_i(t)$为 Bernstein 基函数或 B 样条基函数. 它在 3D 欧氏空间中对应一条有理曲线

$$\boldsymbol{P}(t)=\frac{\sum_{i=0}^{n}w_i\boldsymbol{P}_iB_i(t)}{\sum_{i=0}^{n}w_iB_i(t)}.$$

给定齐次射影空间中一个点列 $\{\tilde{Q}_i=(w_i\boldsymbol{Q}_i, w_i)=(w_ix_i, w_iy_i, w_iz_i, w_i)\}$, 构造一条初始曲线

$$\boldsymbol{R}^{(0)}(t)=\sum_{i=0}^{n}\boldsymbol{R}_i^{(0)}B_i(t);$$

其中, $\boldsymbol{R}_i^{(0)}=\tilde{Q}_i, i=0,1\cdots,n$. 在齐次形式下的几何迭代格式与第 1.1 节一样. 这样产生了一个齐次形式表示的曲线序列 $\{\boldsymbol{R}^{(k)}(t), k=0,1\cdots\}$. 它对应着 3D 欧氏空间中的一个有理曲线序列

$$\left\{\boldsymbol{P}^{(k)}(t)=\frac{\sum_{i=0}^{n}w_i^{(k)}\boldsymbol{P}_i^{(k)}B_i(t)}{\sum_{i=0}^{n}w_i^{(k)}B_i(t)},\ i=0,1,\cdots\right\}$$

和一个权函数序列

$$\left\{w^{(k)}(t)=\sum_{i=0}^{n}w_i^{(k)}B_i(t),\ k=0,1\cdots\right\}.$$

可以证明[10], 上述 2 个序列都是收敛的, 并且

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{P}^{(k)}(t_i)=\boldsymbol{Q}_i,\ i=0,1\cdots,n;$$

$$\lim_{k\to\infty}w^{(k)}(t_i)=w_i,\ i=0,1\cdots,n.$$

1.3　三角 B-B 曲面的插值型几何迭代算法

给定一个点列 $\{\boldsymbol{Q}_{ijk}, i,j,k,=0,1\cdots,n;\ i+j+k=n\}$, 其中每一个点 $\boldsymbol{Q}_{ijk}$ 对应参数值 (u_i,v_j,w_k). 以这组点作为初始控制点, 构造一张初始三角 B-B 曲面

$$\boldsymbol{T}^{(0)}(u,v,w)=\sum_{i,j,k}\boldsymbol{T}_{ijk}^{(0)}B_i(u)B_j(v)B_k(w);$$

其中, $\boldsymbol{T}_{ijk}^{(0)}=\boldsymbol{Q}_{ijk}, 0\leqslant u,v,w\leqslant 1, u+v+w=1$.

假设第 h 次迭代后生成了第 h 次三角 B-B 曲面

$$\boldsymbol{T}^{(h)}(u,v,w)=\sum_{ijk}\boldsymbol{T}_{ijk}^{(h)}B_i(u)B_j(v)B_k(w);$$

为生成第 h+1 次三角 B-B 曲面, 计算

$$\boldsymbol{\varDelta}_{ijk}^{(h)}=\boldsymbol{Q}_{ijk}-\boldsymbol{T}^{(h)}(u_i,v_j,w_k);$$

将其加到控制顶点 $\boldsymbol{T}_{ijk}^{(h)}$ 上, 得到第 h+1 次三角 B-B 曲面的控制顶点 $\boldsymbol{T}_{ijk}^{(h+1)}=\boldsymbol{T}_{ijk}^{(h)}+\boldsymbol{\varDelta}_{ijk}^{(h)}$. 这样, 就生成了第 h+1 次三角 B-B 曲面 $\boldsymbol{T}^{(h+1)}(u,v,w)$.

这个迭代过程产生了一个三角 B-B 曲面序列

$$\{\boldsymbol{T}^h(u,v,w),\ 0\leqslant u,v,w\leqslant 1,\ u+v+w=1\}.$$

当数据点对应的参数值取均匀参数时, 即

$$(u_i,v_j,w_k)=\left(\frac{i}{n},\frac{j}{n},\frac{k}{n}\right), i+j+k=n,$$

利用 Bernstein 算子的性质以及算子和矩阵的对应关系, Chen 等证明了这个三角 B-B 曲面序列的收敛性[11], 也就是

$$\lim_{h\to\infty}\boldsymbol{T}^{(h)}\left(\frac{i}{n},\frac{j}{n},\frac{k}{n}\right)=\boldsymbol{Q}_{ijk}.$$

在一般情况下, 目前仅证明了 4 次和 4 次以下三角 B-B 曲面序列的收敛性[12].

1.4　细分曲面的几何迭代算法

本节中涉及的细分曲面为逼近型细分曲面, 具体为 Catmull-Clark, Doo-Sabin 及 Loop 细分曲面. 假设 $Q=\{\boldsymbol{Q}_i\}$ 为一个细分曲面的控制网格顶点集合, 其中, $\boldsymbol{Q}_i$ 为网格顶点. 每一个网格顶点 $\boldsymbol{Q}_i$ 在细分极限曲面上都有一个极限位置 $\boldsymbol{Q}_{i,\infty}$, 它可以表示为相应控制网格顶点的线性组合, 例如

$$\boldsymbol{Q}_{i,\infty}=c_1\boldsymbol{Q}_{i,1}+c_2\boldsymbol{Q}_{i,2}+\cdots+c_k\boldsymbol{Q}_{i,k}.$$

以给定的控制网格 Q 为初始控制网格

$$P^{(0)}=\{\boldsymbol{P}_i^{(0)}\},$$

其中, $\boldsymbol{P}_i^{(0)}=\boldsymbol{Q}_i$, 可以生成一张初始细分曲面 $S^{(0)}$.

假设第 k 次迭代后生成的第 k 次细分曲面 $S^{(k)}$ 的控制网格为 $P^{(k)}=\{\boldsymbol{P}_i^k\}$, 它的每一个网格顶点 $P_i^{(k)}$ 在细分曲面 $S^{(k)}$ 上的极限位置为 $\boldsymbol{P}_{i,\infty}^{(k)}$. 构造差向量 $\boldsymbol{\varDelta}_i^{(k)}=\boldsymbol{Q}_i-\boldsymbol{P}_{i,\infty}^{(k)}$, 并将它加到第 k 次控制网格的顶点上, 生成了第 k+1 次细分曲面 $S^{(k+1)}$ 的控制网格 $P^{(k+1)}=\{\boldsymbol{P}_i^{(k+1)}\}$, $\boldsymbol{P}_i^{(k+1)}=\boldsymbol{P}_i^{(k)}+\boldsymbol{\varDelta}_i^{(k)}$. 这样, 就产生了一系列细分曲面序列 $\{S^{(k)}, k=0, 1, \cdots\}$. 当细分曲面为 Doo-Sabin[13-14] 或 Loop[15-16] 细分曲面时, 或当细分曲面为 Catmull-Clark 细分曲面[17], 并且它的控制网格中不存在度为 3 的顶点时, 有

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{P}_{i,\infty}^{(k)}=\boldsymbol{Q}_i.$$

1.5　插值型几何迭代算法的迭代速度和加速方法

如第 1.1 节所述, 当混合曲线曲面的基函数是全正基函数时, 插值型几何迭代算法都收敛. 由于 B 样条基函数和 Bernstein 基函数都是全正基函数, 所以 B 样条曲线曲面和 Bézier 曲线曲面的插值型几何迭代格式都收敛. 这两者之中, B 样条曲线曲面的迭代速度更快[18-19].

插值型几何迭代法的加速是通过在差向量 $\boldsymbol{\varDelta}_i^{(k)}$ 前面乘以一个权因子 ω 来实现的. 这样, 迭代格式变为 $\boldsymbol{P}_i^{(k+1)}=\boldsymbol{P}_i^{(k)}+\omega\boldsymbol{\varDelta}_i^{(k)}, i=0,1,\cdots n$.

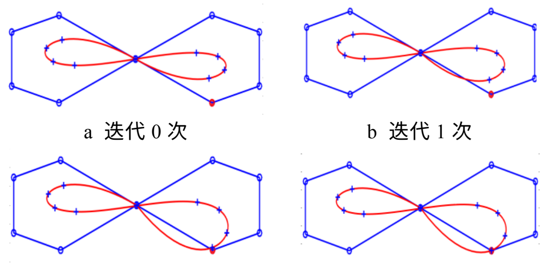
假设 $\lambda_{\min}$ 为基函数配置矩阵的最小特征值, 当权因子取 $\omega=\dfrac{2}{1+\lambda_{\min}}$ 时, 插值型几何迭代算法达到最快迭代速度[20-21].

另一方面, 针对因病态配置矩阵而导致收敛速度过慢的问题, 通过矩阵 QR 分解引入变换矩阵,

再优化迭代矩阵的谱半径，可以加快迭代收敛速度[22].

1.6　插值型几何迭代算法的局部性质

插值型几何迭代算法具有局部性质，也就是说，当只调整某些数据点对应的控制点，而保持其他数据点对应的控制点不动时，迭代的极限曲线曲面将只插值于那些被调整的控制点对应的数据点. 如图 1 所示，图 1a 中红色曲线为一条初始 Bézier 曲线，蓝色折线是它的控制多边形. 在迭代过程中只调整红色点对应的控制顶点，其他控制顶点保持不动；经过不断迭代，曲线将插值于图 1d 所示红色点. 这一性质为几何迭代法带来很大的灵活性[23-24].



a 迭代 0 次　b 迭代 1 次

c 迭代 5 次　d 迭代 10 次

图 1　插值型几何迭代法的局部性质

1.7　插值型几何迭代算法的推广

插值型几何迭代算法可以推广到非标准全正基混合曲线曲面[25]，通过选择适当的参数，非标准全正基混合曲线曲面的插值型几何迭代也是收敛的. 实际上，如果配置矩阵为严格对角占优或者广义严格对角占优矩阵，则迭代是收敛的[26]. 由此，三角域上的 Said-Ball 曲面[26]和 T-Bézier 三角曲面[27]的渐进迭代是收敛的.

另一方面，当差向量前的权因子各不相同时，不同控制顶点具有不同的收敛速度[25]. 进而，通过引入变换矩阵，经典的渐进迭代格式、加权渐进迭代格式和局部渐进迭代格式可以统一为同一个迭代格式[28].

2　逼近型几何迭代算法

在插值型几何迭代法中，混合曲线曲面控制顶点的个数与数据点的个数一样多，迭代的极限曲线曲面插值于给定数据点. 在逼近型几何迭代法中，控制点的个数少于数据点的个数，迭代的极限曲线曲面逼近给定的数据点集. 目前，共有 2 种逼近型几何迭代格式，分别是 EPIA: extended progressive-iterative approximation，和 LSPIA: least- squares progressive-iterative approximation，下面分别介绍.

2.1　EPIA

给定数据点列 $\{\boldsymbol{Q}_i,\ i=0,1,\cdots,n\}$，其中每一个点 $\boldsymbol{Q}_i$ 赋予一个参数值 $\{t_i,\ i=0,1,\cdots,n\}$. 如图 2 所示，在迭代之初，首先构造初始混合曲线为 $\boldsymbol{P}^{(0)}(t)$ (绿色曲线)，并对数据点列(蓝色)分组，每一组对应混合曲线的一个控制点.

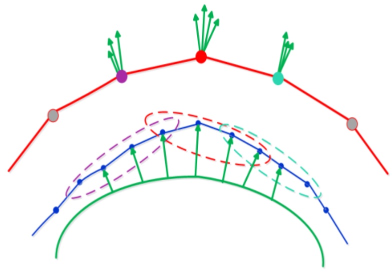


图 2　EPIA 迭代格式示意图

假设迭代 k 次后生成的第 k 次曲线为

$$\boldsymbol{P}^{(k)}(t)=\sum_j \boldsymbol{P}_j^{(k)}B_j(t).$$

在 EPIA 迭代的每一步，首先生成关于数据点的差向量

$$\boldsymbol{\delta}_i^{(k)}=\boldsymbol{Q}_i-\boldsymbol{P}^{(k)}(t_i),\ i=0,1\cdots,n;$$

然后，将每一组数据点对应的差向量加权平均，得到关于控制点的差向量

$$\boldsymbol{\varDelta}_j^{(k)}=\frac{\sum_{i\in I_j} c_i^j\boldsymbol{\delta}_i^{(k)}}{\sum_{i\in I_j} c_i^j}.$$

其中，I_j 是第 j 组数据点的指标集合，$c_i^j>0$ 为权因子. 在文献[29]中证明了当 $c_i^j=1$ 时，EPIA 迭代格式是收敛的.

2.2　LSPIA

LSPIA 实际上是一种特殊的 EPIA 迭代格式，它的特殊性在于分组的特殊性. 假设初始曲线为

$$\boldsymbol{P}^{(0)}(t)=\sum_j \boldsymbol{P}_j^{(0)}B_j(t);$$

对于第 j 个基函数 $B_j(t)$，所有使 $B_j(t_i)$不为 0 的参数 t_i 对应的数据点分为一组，并对应于第 j 个控制顶点. 在迭代的每一步，LSPIA 的迭代步骤与 EPIA 相同. 将每一组数据点对应的差向量加权平均时，权取为 $c_i^j=B_j(t_i)$，也就是

$$\boldsymbol{\varDelta}_j^{(k)}=\frac{\sum_{i\in I_j} B_j(t_i)\boldsymbol{\delta}_i^{(k)}}{\sum_{i\in I_j} B_j(t_i)}.$$

可以证明, LSPIA 迭代格式是收敛的, 并且收敛于对于数据点集的最小二乘拟合结果.

LSPIA 有一些很好的性质. 当混合曲线的基函数有局部支撑性时, LSPIA 迭代每一步的时间复杂度只跟数据点的个数有关, 跟控制点(也就是未知数)的个数无关[30]; 因此, 它适合于增量拟合大规模数据. 另外, 不论迭代矩阵是否奇异, LSPIA 都是收敛的; 因而, LSPIA 具有很好的鲁棒性[30-31].

3 几何迭代法的应用

自几何迭代法提出以来, 在几何设计及相关领域的学术研究和工程实践中得到了广泛应用. 它不仅在解决几何设计中的传统问题上获得了更好的效果, 如等距曲线、降阶逼近、有理曲线曲面的多项式逼近等, 还被成功地应用于自适应数据拟合、大规模数据拟合、对称曲面拟合, 以及插值给定位置、切矢量和曲率矢量的曲线迭代生成, 有质量保证的四边网格和六面体网格生成, 三变量 B-spline 体的生成等.

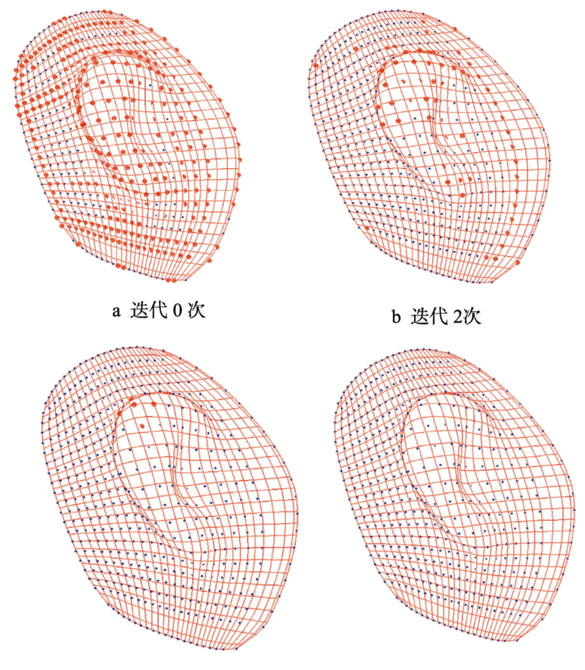
3.1 在几何设计领域的应用

下面首先介绍几何迭代法在几何设计领域的应用. 为提高 Bézier 曲线降阶的稳定性, 文献[32]提出了一种以 L_2 范数的逼近误差为指导的迭代算法, 它从一条初始 Bézier 曲线开始逐渐地对其控制顶点进行偏移, 得到误差最小的逼近曲线, 显著提高了降阶算法的稳定性. 进而, 从一条初始 Bézier 曲线出发, 以有理曲线上采样点处计算得到的 $L_p(p=1, 2,\infty)$误差为衡量标准, 迭代调整 Bézier 曲线的控制顶点, 得到了在 $L_p(p=1, 2, \infty)$误差下对有理曲线的最佳逼近 Bézier 曲线[33]. 类似地, 渐进迭代逼近算法还被用来计算有理三角 B-B 曲面的多项式逼近曲面[34]. 另一方面, 通过在等距曲线上采样数据点, 对数据点进行参数化, 并以这些采样点作为初始控制顶点, 产生初始逼近曲线; 然后考察相同参数值处采样点和逼近点的误差, 并运用 PIA 方法逐步逼近等距曲线. 这种方法不仅统一实现了等距曲线的多项式逼近和有理逼近, 而且 PIA 方法比以往方法在控制顶点数和算法误差 2 个方面具有明显的优势[35].

在几何迭代过程中加入适当的几何条件, 可以生成同时插值位置、切向量和曲率向量的极限曲线[36-38], 并且曲线的几何品质要优于现有方法生成的曲线. 利用几何迭代的局部性质, 还可以实现对曲面的实时修改操作, 使得修改后的曲面插值给定的数据点[39]. 几何迭代法还被用于修改样条曲面, 使得曲面的等参线在节点处插值指定的位置、切向和曲率向量[40]. 另外, 我们还设计了一种变分 PIA 格式生成光顺曲线曲面[41].

3.2 在数据拟合领域的应用

几何迭代法的局部性质也给数据拟合带来了很大的灵活性. 根据这一性质, 在迭代过程中, 可以不断检查每个数据点的拟合精度, 如果某个点的拟合精度达到了要求, 其对应的控制顶点就可以固定下来, 不再调整, 实现了数据拟合的自适应. 理论分析和实验验证证明, 数据的自适应拟合极大减小了计算量. 如图 3[42]所示数据的自适应拟合中,在每一步迭代后检测数据点的拟合精度, 固定精度达到要求的数据点对应的控制顶点, 只调整精度未达要求的数据点对应的控制顶点(红色点), 极大节省了计算量.



a 迭代 0 次　b 迭代 2次　c 迭代 5 次　d 迭代 7 次

图 3 数据的自适应拟合

另一方面, 由于 LSPIA 的迭代速度只与数据点有关, 而与控制顶点的个数无关, 而且, LSPIA 迭代格式很容易并行化, 再加上 T 样条曲面表示形式的自适应性, 我们提出了一种适合于拟合大规模数据的 T 样条 LSPIA 算法[30], 能够实现在微机上快速拟合有超过 5000 万像素的高精度图像.

3.3 在逆向工程领域的应用

几何迭代法在逆向工程领域也获得了成功应用. 在曲线重建方面, Lin 等[43]用一条区间 B 样条

曲线包围带状点云, 并以区间 B 样条曲线的中心曲线作为重建曲线; 其中, 区间 B 样条曲线的边界曲线和中心曲线都是采用 PIA 方法生成的. 在曲面重建方面, PIA 方法被用来对曲面的控制顶点进行微调整, 以生成高品质 A 类曲面[44]. 通过几何迭代法在迭代过程中不断修正的能力, 可以保证重建几何模型是拓扑正确的[45]. 不仅如此, 利用几何迭代法还可以重建出几何上对称的曲面[46]. 具体而言, 对于一个对称点云, 在迭代的每一步, 将重建曲面的控制网格的左右 2 部分进行镜面映射, 并将映射后的网格与原网格的对应控制顶点进行平均操作, 以提高控制网格的对称性[46].

3.4 体网格和 NURBS 体的生成

六面体网格生成是有限元分析中的经典难题, 现有的六面体网格生成算法难以保证生成的六面体网格没有翻转, 即网格顶点处的雅克比值都是正的. 采用几何迭代法, 从一个初始六面体网格开始, 在迭代的每一步, 给每个网格顶点设定一个限制域. 如果网格顶点不超过这个限制域, 就能保证生成的六面体网格没有翻转[47-48]. 类似方法还可以生成保证没有翻转的四边形网格[49].

随着等几何分析的发展, 迫切需要开展 NURBS 体生成方法的研究. 一种较为实用的思路是通过拟合四面体网格来生成 NURBS 体. 但是, 一般来说, 四面体网格的顶点个数比较多, 这一方面导致拟合的计算量很大, 另一方面, 使得拟合方程组的条件数很大, 甚至成为病态方程组. 利用 LSPIA 迭代速度与控制点个数无关的性质, 可以鲁棒、高效地求解四面体网格拟合方程组, 生成理想的 NURBS 体, 如图 4 [50-51]所示.

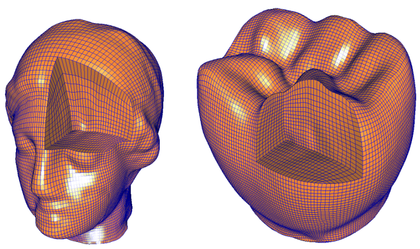


图 4 采用几何迭代法生成的三变量 B 样条体

3.5 其他应用

2013 年, Natasha 等学者连续发表 4 篇文章, 将 PIA 技术分别用于卫星图像处理[52]、模式识别[53]、手绘曲线逼近[54], 以及有理曲线逼近[55]. PIA 技术还被用于在 NURBS 曲面中添加水印[56], 以及树木的树干造型[57]. 另外, PIA 技术在工程实践领域也得到了应用, 被成功地用于飞机机翼造型[58], 拟合涡轮发动机部件特性[59], 以及汽车车灯系统外形优化[60]等.

4 总结与展望

自 2005 年几何迭代法, 即 PIA 提出以来, 经过 10 年的发展, 其理论体系逐渐完善, 并在许多科学研究和工程实践领域得到了成功地应用. 本文综述了插值型几何迭代法的迭代格式、收敛性、收敛速度与加速方法、它的局部性质, 以及几种推广形式; 另外, 本文还介绍了 2 种逼近型几何迭代格式 EPIA 与 LSPIA, 以及它们的收敛性质. 进一步, 综述了几何迭代法在多个领域的成功应用, 包括在几何设计领域、数据拟合领域、逆向工程领域、体网格生成和 NURBS 体生成方面, 以及其他科学研究和工程实践中的应用. 由于几何迭代格式具有明显的几何意义, 这使得在迭代过程中可以灵活地加入几何约束条件, 从而可以解决现有方法解决不了或者解决不好的问题. 因此, 几何迭代法或者几何迭代这种研究思路在科学研究和工程实践中有着广阔的应用前景.

参考文献(References):

[1] Qi Dongxu, Tian Zixian, Zhang Yuxin, *et al*. The method of numeric polish in curve fitting [J]. Acta Mathematica Sinica, 1975, 18 (3) : 173-184 (in Chinese)
(齐东旭, 田自贤, 张玉心, 等. 曲线拟合的数值磨光方法[J]. 数学学报, 1975, 18(3) : 173-184)

[2] de Boor C. How does Agee's smoothing method work?[R] Washington D C: Army Research Office 79-3, 1979 :299-302

[3] Lin H W, Wang G J, Dong, C S Constructing iterative non-uniform B-spline curve and surface to fit data points [J]. Science in China : Series F, 2004, 47 (3) : 315-331

[4] Lin H W , Bao H J, Wang G J. Totally positive bases and progressive iteration approximation [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2005, 50(3/4) : 575-586

[5] Maekawa T, Matsumoto Y, Namiki K. Interpolation by geometric algorithm [J]. Computer-Aided Design, 2007, 39(4) : 313-323

[6] Lin HW. The convergence of the geometric interpolation algorithm[J]. Computer-Aided Design, 2010, 42(6) : 505-508

[7] Xiong Y H, Li G Q, Mao A H. Convergence analysis for B-spline geometric interpolation [J]. Computers & Graphics, 2012, 36(7) : 884-891

[8] Deng C Y. An explicit formula for the control points of periodic uniform spline interpolants and its application [J]. Computer Aided Geometric Design, 2013, 30(4): 389-397

[9] Deng Shaohui, Wang Guozhao. Error estimation and application of a new class of graphics fitting method [J]. Journal of

Zhejiang University：Engineering Science, 2014, 48(5) : 942-956 (in Chinese)
(邓少辉, 汪国昭. 新型图形拟合方法的误差估计及应用 [J]. 浙江大学学报 :工学版, 2014, 48(5) : 942-956)

[10] Shi Limin, Wang Renhong. An iterative algorithm of NURBS interpolation and approximation [J]. Journal of Mathematical Research and Exposition, 2006, 26 (4) : 735–743 (in Chinese)
(史利民, 王仁宏. NURBS 曲线曲面拟合数据点的迭代算法 [J]. 数学研究与评论, 2006, 26(4) : 735-743)

[11] Chen J, Wang G J. Progressive iterative approximation for triangular Bézier surfaces [J]. Computer-Aided Design, 2011, 43(8) : 889-895

[12] Zhao Y, Lin H W. The PIA property of low degree non-uniform triangular B-B patches [C] // Proceedings of 12th International Conference on Computer-Aided Design and Computer Graphics. Los Alamitos: IEEE Compute 的 Society Press, 2011 : 239-242

[13] Cheng F H (Frank), Fan F T, Huang C L, *et al*. Smooth surface reconstruction using Doo-Sabin subdivision surfaces [C] // Proceedings of 3rd International Conference on Geometric Modeling and Imaging. Los Alamitos: IEEE Compute 的 Society Press, 2008 : 27-33

[14] Fan F, Cheng F., Lai S. Subdivision based interpolation with shape control[J]. Computer Aided Design & Applications, 2008, 5(1-4): 539-547

[15] Cheng F, Fan F, Lai S, *et al*. Progressive interpolation using loop subdivision surfaces[C] // Proceedings of the 5th International Conference on Advances in Geometric Modeling and Processing, Berlin: Springer, 2008: 526-533

[16] Cheng F, Fan F, Lai S, *et al*. Loop subdivision surface based progressive interpolation [J]. Journal of Computer Science and Technology, 2009, 24(1): 39-46

[17] Chen Z, Luo X, Tan L, *et al*. Progressive interpolation based on Catmull-Clark subdivision surfaces [J]. Computer Graphics Forum, 2008, 27(7): 1823-1827

[18] Delgado J, Pena J M. Progressive iterative approximation and bases with the fastest convergence rates [J]. Computer Aided Geometric Design, 2007, 24(1) : 10-18

[19] Delgado J, Manuel P J. A Comparison Of Different Progressive Iteration Approximation Methods [C] // Proceedings of 7th International Conference on Mathematical Methods for Curves and Surfaces. Tonsbrg : Springer, 2008 : 136-152

[20] Lu L Z. Weighted progressive iteration approximation and convergence analysis [J]. Computer Aided Geometric Design, 2010, 27(2) : 129-137

[21] Deng C Y, Ma W Y. Weighted progressive interpolation of Loop subdivision surfaces [J]. Computer-Aided Design, 2012, 44(5): 424-431

[22] Deng Shaohui, Wang Guozhao. Numerical analysis of the progressive iterative approximation method [J]. Journal of Computer-Aided Design and Graphics, 2012, 24(7) : 879-884 (in Chinese)
(邓少辉, 汪国昭. 渐进迭代逼近方法的数值分析 [J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2012, 24(7) : 879-884)

[23] Lin Hongwei. Local progressive-iterative approximation format for blending curves and patches [J]. Computer Aided Geometric Design, 2010, 27(4) : 322-339

[24] Zhao Yu, Lin Hongwei, Bao Hujun. Local progressive interpolation for subdivision surface fitting [J]. Journal of Computer Research and Development, 2012, 49(8) : 1699-1707 (in Chinese)
(赵 宇, 蔺宏伟, 鲍虎军. 细分曲面拟合的局部渐进插值方法 [J]. 计算机研究与发展, 2012, 49(8) : 1699-1707)

[25] Chen Jie, Wang Guojin, Jin Congjian. Two kinds of generalized progressive iterative approximations [J]. Acta Automatica Sinica, 2012, 38(1) : 135-139 (in Chinese)
(陈 杰, 王国瑾, 金聪健. 两类推广的渐近迭代逼近[J].自动化学报, 2012, 38(1) : 135-139)

[26] Zhang Li, Li Yuanyuan, Yang Yan, *et al*. Generalized progressive iterative approximation for Said-Ball bases on triangular domains[J]. Journal of Image and Graphics, 2014, 19(2) : 275-282 (in Chinese)
(张 莉, 李园园, 杨 燕, 等. 三角域上 Said-Ball 基的推广渐近迭代逼近[J]. 中国图象图形学报, 2014, 19(2) : 275-282)

[27] Chen Sugen. Progressive iterative algorithm for triangular T-Bézier surfaces[J]. Computer Engineering and Application, 2014, 50(19): 152-155 (in Chinese)
(陈素根. 一类 T-Bézier 三角曲面渐渐迭代算法[J]. 计算机工程与应用, 2014, 50(19): 152-155)

[28] Deng S H, Guan S J, Wang G Z, *et al* . An extension of a new kind of graphics fitting method[J]. Applied Mathematics & Information Sciences, 2013, 7(2) : 741-747

[29] Lin H W, Zhang Z Y. An extended iterative format for the progressive-iteration approximation [J]. Computers & Graphics, 2011, 35(5) : 967-975

[30] Lin H W, Zhang Z Y. An efficient method for fitting large data sets using T-splines [J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2013, 35(6) : A3052-A3068

[31] Deng C Y, Lin H W. Progressive and iterative approximation for least squares B-spline curve and surface fitting [J]. Computer-Aided Design, 2014, 47 : 32-44

[32] Lu Lizheng, Hu Qianqian, Wang Guozhao. An iterative algorithm for degree reduction of Bézier curves [J]. Journal of Computer-Aided Design & Graphics, 2009, 21(12) : 1689-1693 (in Chinese)
(陆利正, 胡倩倩, 汪国昭. Bézier 曲线降阶的迭代算法 [J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2009, 21(12) : 1689-1693)

[33] Lu L Z. Sample-based polynomial approximation of rational Bézier curves [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2011, 235(6) : 1557-1563

[34] Hu Q Q. An iterative algorithm for polynomial of rational triangular Bézier surfaces [J]. Applied Mathematics and Computation, 2013, 219(17) : 9308-9316

[35] Zhang Li, Wang Huan, Li Yuanyuan, *et al* . A progressive iterative approximation method in offset approximation [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2014, 26(10) : 1646-1653 (in Chinese)
(张 莉, 王 涣, 李园园, 等. 渐进迭代逼近方法在等距曲线逼近中的应用 [J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2014, 26(10) : 1646-1653)

[36] Gofuku S, Tamura S, Maekawa T. Point-tangent/point-normal B-spline curve interpolation by geometric algorithms [J]. Computer-Aided Design, 2009, 41(6) : 412-422

[37] Okaniwa S, Nasri A, Lin H, *et al*. Uniform B-spline curve in-

terpolation with prescribed tangent curvature vectors [J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2012, 18(9) : 1474-1487

[38] Xing Rongsheng, Pan Rijing. PIA for uniform cubic B-spline curve interpolation with prescribed tangent vector [J]. Journal of Fujian Normal University：Natural Science Edition, 2014, 30(1) : 25-32 (in Chinese)
(星蓉生, 潘日晶. 三次均匀 B 样条曲线插值数据点及其切矢的 PIA 算法 [J]. 福建师范大学学报：自然科学版, 2014, 30(1) : 25-32)

[39] Zhao Yu, Lin Hongwei. Real-time interactive modification of B-spline by PIA [J]. Journal of Computer-Aided Design& Graphics, 2011, 23(12) : 2013-2018 (in Chinese)
(赵 宇, 蔺宏伟. 基于PIA的B-spline曲面实时交互修改方法 [J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2011, 23(12) : 2013-2018)

[40] Kineri Y, Endo S, Maekawa T. Surface design based on direct curvature editing [J]. Computer-Aided Design, 2014, 55 : 1-12

[41] Lin H W, Zhao Y. Variational progressive-iterative approximation for fairing curve and surface generation [C] // Proceedings of 12th International Conference on Computer-Aided Design and Computer Graphics. Ji'nan : IEEE Press, 2011 : 258-261.

[42] Lin H W. Adaptive Fitting by the Progressive-iterative Approximation [J]. Computer Aided Geometric Design, 2012, 29(7) : 463-473

[43] Lin H W, Chen W, Wang G J. Curve reconstruction based on an interval B-spline curve[J]. The Visual Computer, 2005, 21(6) : 418-427

[44] Liu Y Z, Fu H S, Ju L Y. Application research of iterative minor adjustment in reverse engineering [C] // Proceedings of IEEE International Conference on Mechatronics and Automation, Los Alamitos: IEEE Compute 的 Society Press, 2009 : 622-626

[45] Yoshihara H, Yoshii T, Shibutani T, *et al* Topologically robust B-spline surface reconstruction from point clouds using level set methods and iterative geometric fitting algorithms [J]. Computer Aided Geometric Design, 2012, 29(7) : 422-434

[46] Kineri Y, Wang M, Lin H, *et al*. B-spline surface fitting by iterative geometric interpolation/approximation algorithms [J]. Computer-Aided Design, 2012, 44(7) : 697-708

[47] Lin H W, Liao H W, Deng C Y. Filling triangular mesh model with all-hex mesh by volume subdivision fitting [R]. Hangzhou : Zhejiang University, 2012

[48] Lin H W, Jin S N, Liao H W, *et al.* Quality guaranteed all-hex mesh generation by a constrained volume iterative fitting algorithm [R]. Hangzhou : Zhejiang University, 2013

[49] Lin H W, Jian Q, Jin S N. Generating quality guaranteed quadrilateral mesh on an *n*-sided region with geometric iterative fitting [R]. Hangzhou : Zhejiang University, 2013

[50] Martin T, Cohen E, Kirby R M. Volumetric parameterization and trivariate B-spline fitting using harmonic functions [J]. Computer Aided Geometric Design, 2009, 26(6):648–664

[51] Lin H W, Jin S N, Hu Q Q. Constructing B-spline solids from tetrahedral meshes for isogeometric analysis[OL]. [2015-03-15].
http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167839615000369

[52] Boonyasith K, Akara P, Preesan R, *et al*. Rice phenology monitoring using PIA time series MODIS imagery [C] // Proceedings of 10th International Conference on Computer Graphics, Imaging and Visualization, Los Alamitos: IEEE Compute 的 Society Press, 2013: 84-87

[53] Suchada S, Natasha D. An approach to Thai decorative pattern recognition using Bézier curve representation with progressive iterative approximation [C] // Proceedings of 10th International Conference on Computer Graphics, Imaging and Visualization . Los Alamitos: IEEE Compute 的 Society Press, 2013: 46-49

[54] Taweechai N, Natasha D. Approximating handwritten curve by using progressive-iterative approximation [C] // Proceedings of 10th International Conference on Computer Graphics, Imaging and Visualization . Los Alamitos: IEEE Compute 的 Society Press, 2013: 33-37

[55] Anchisa C, Natasha D. Conversion of rational Bézier curves into non-rational Bézier curves using progressive iterative approximation [C] // Proceedings of 10th International Conference on Computer Graphics, Imaging and Visualization . Los Alamitos: IEEE Compute 的 Society Press, 2013: 38-41.

[56] Pan Z G, Sun S S, Zhang M M, *et al*. Watermarking NURBS surfaces [C] // Proceedings of 6th Pacific-Rim Conference on Multimedia, Berlin : Springer, 2005 : 325-336

[57] Kuzelka K., Marusak R. Comparison of selected splines for stem form modeling : A case study in Norway spruce [J]. Annals of Forest Research, 2014, 57(1) : 137-148

[58] Yu Zhefeng, Song Wenbin, Qian Jingjing, *et al* . On technology of parametric wing modeling based on CATIA [J]. Aircraft Design, 2010, 30(3) : 27-30 (in Chinese)
(于哲峰, 宋文斌, 钱晶晶, 等. 机翼几何外形的CATIA参数化建模实现方法 [J]. 飞机设计, 2010, 30(3) : 27-30)

[59] Sui Yanfeng, Zhang Zhiqiang, Zhao Jun. Fitting of component characteristics of turbine engine based on non-uniform rational B-splines [J]. Journal of Aerospace Power, 2008, 23(8): 1486-1489 (in Chinese)
(隋岩峰, 张志强, 赵 军. 应用非均匀B样条拟合涡轮发动机部件特性 [J]. 航空动力学报, 2008, 23(8) : 1486-1489)

[60] Wang Gang. Research on minor adjustment of freeform curves & surfaces and its applications[D]. Hangzhou：Zhejiang University. Institute of Chemical Machinery Engineering, 2006(in Chinese)
(王 刚. 自由曲线曲面微调整技术及其应用[D]. 杭州 : 浙江大学化工机械研究所, 2006)