

图像去模糊与数学优化

周晓巍

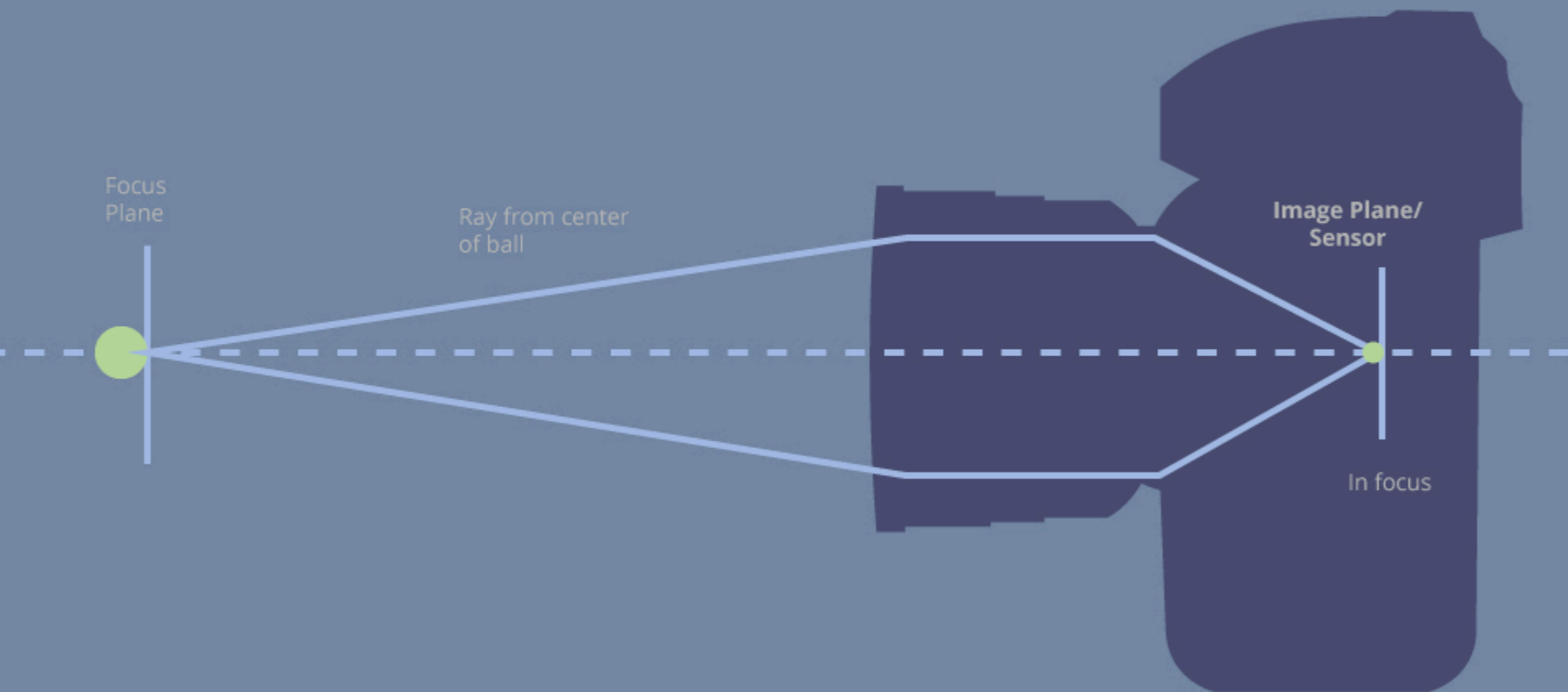
计算摄影学第六节

Outline

- 图像去模糊
 - 图像模糊的原因
 - 图像模糊的数学表述
 - 图像去模糊的方法

- 数学优化
 - 如何建模
 - 如何求解

相机模型



拍照三要素

- 构图
- 对焦
- 快门



构图

- 选择主体与视角



构图

- 选择焦距



24mm



50mm



200mm



800mm

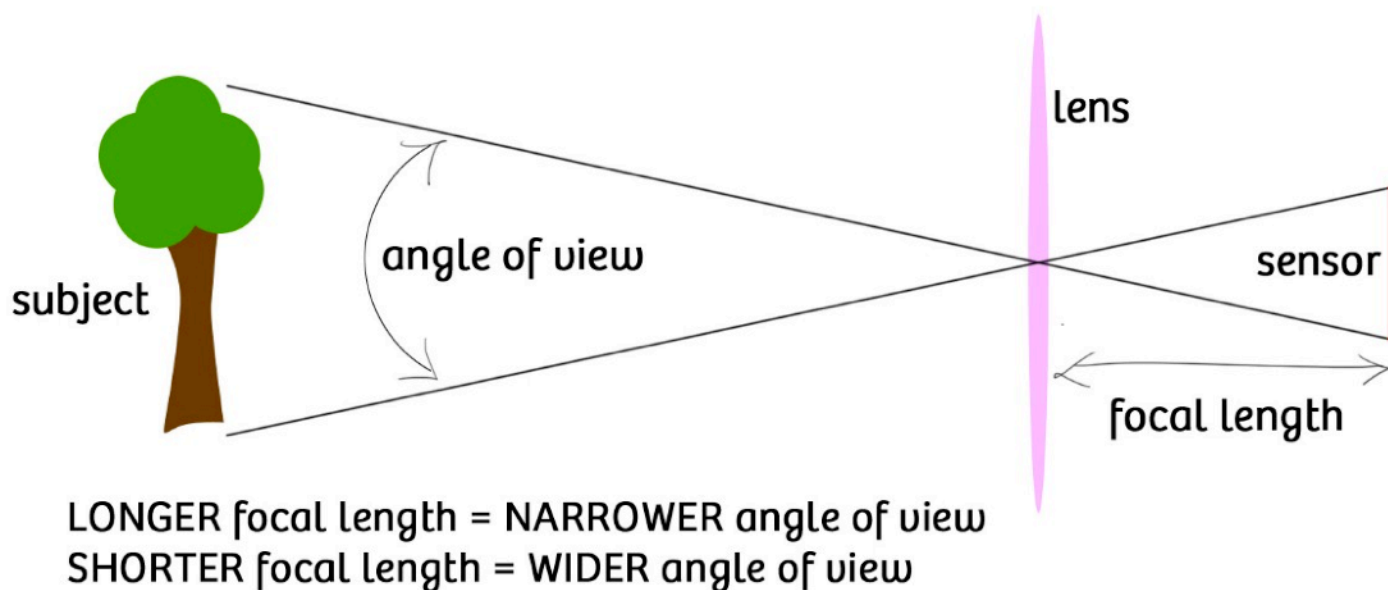


构图

- 焦距控制了放大率与视野

$$\frac{s_{img}}{s_{obj}} = \frac{f}{d_{obj}}$$

$$\text{Angle of view} = \frac{\text{Sensor size}}{\text{focal length}}$$



构图



三分构图



对角线构图

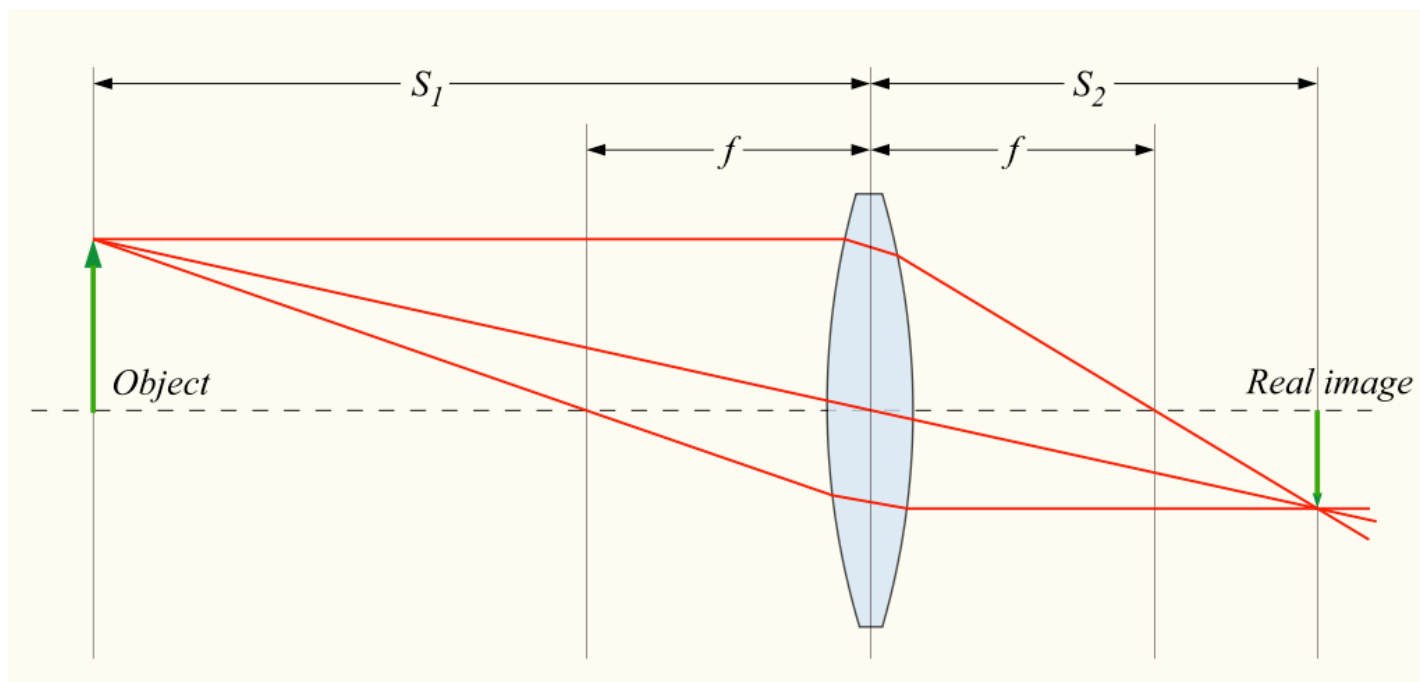
对焦

- 选择焦点（成像清楚的地方）
- 半按快门（传统相机）
- 点击触屏（智能手机）



对焦

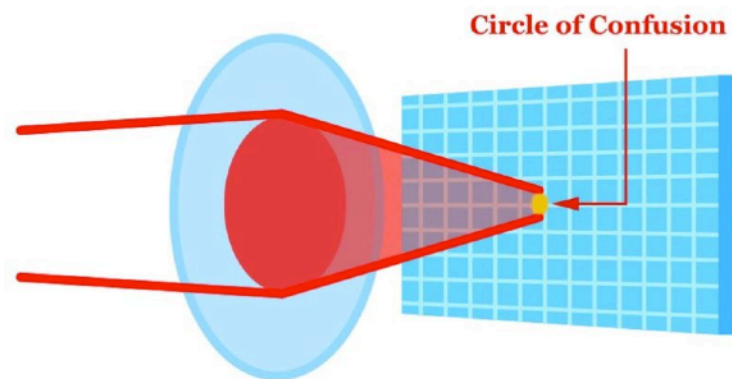
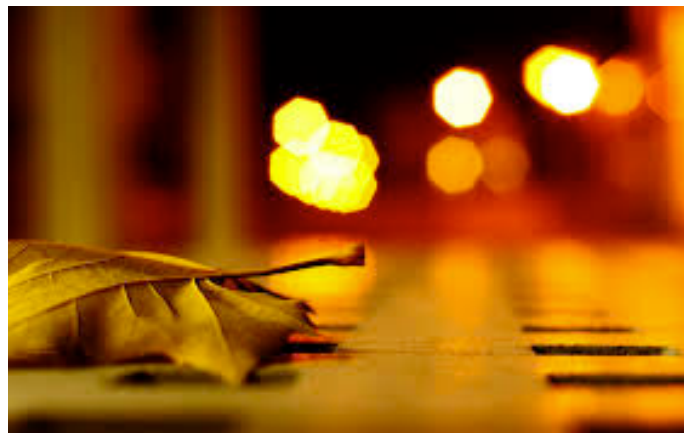
- 调整焦距 f 以及像距 S_2 使得物体成像于传感器平面



$$\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} = \frac{1}{f}$$

焦外模糊

- 对焦平面以外的点在像平面形成散斑



<https://www.lensartavenue.com/circle-of-confusion/>

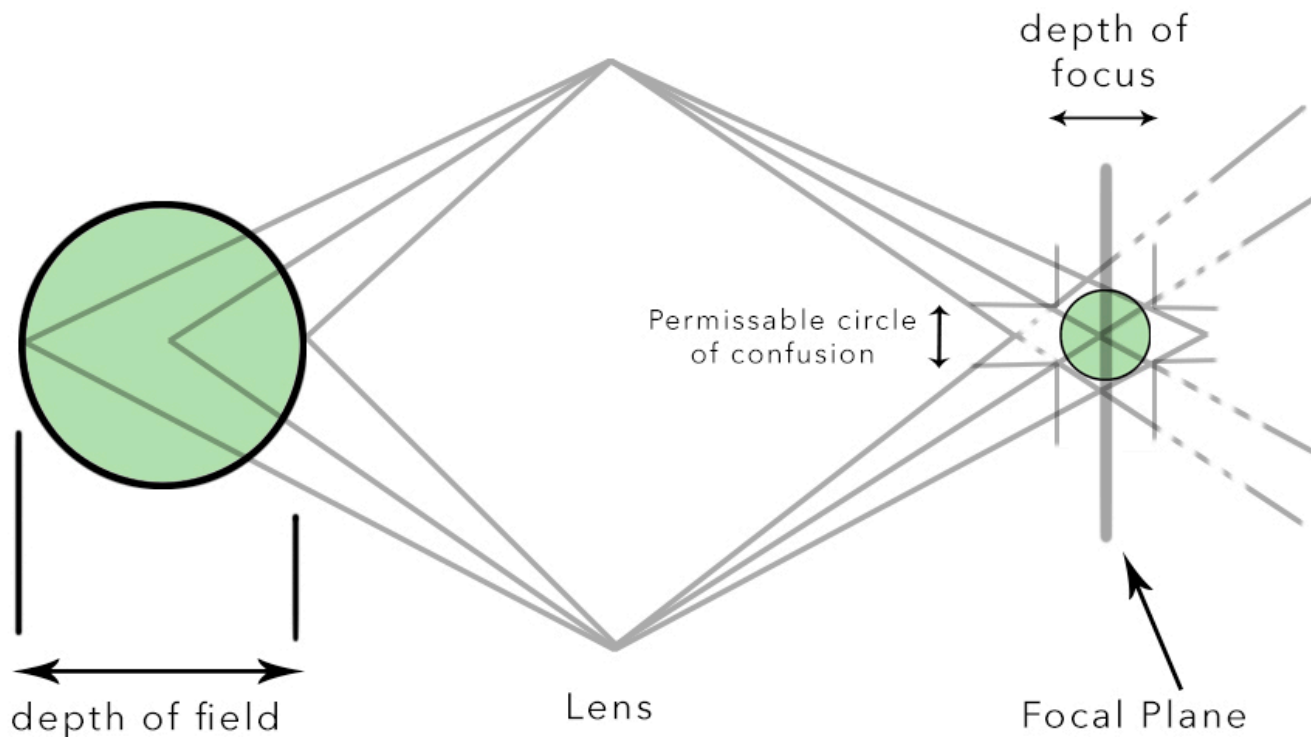
景深

- 一定的深度范围内成像清楚
- 这个范围的大小称为景深



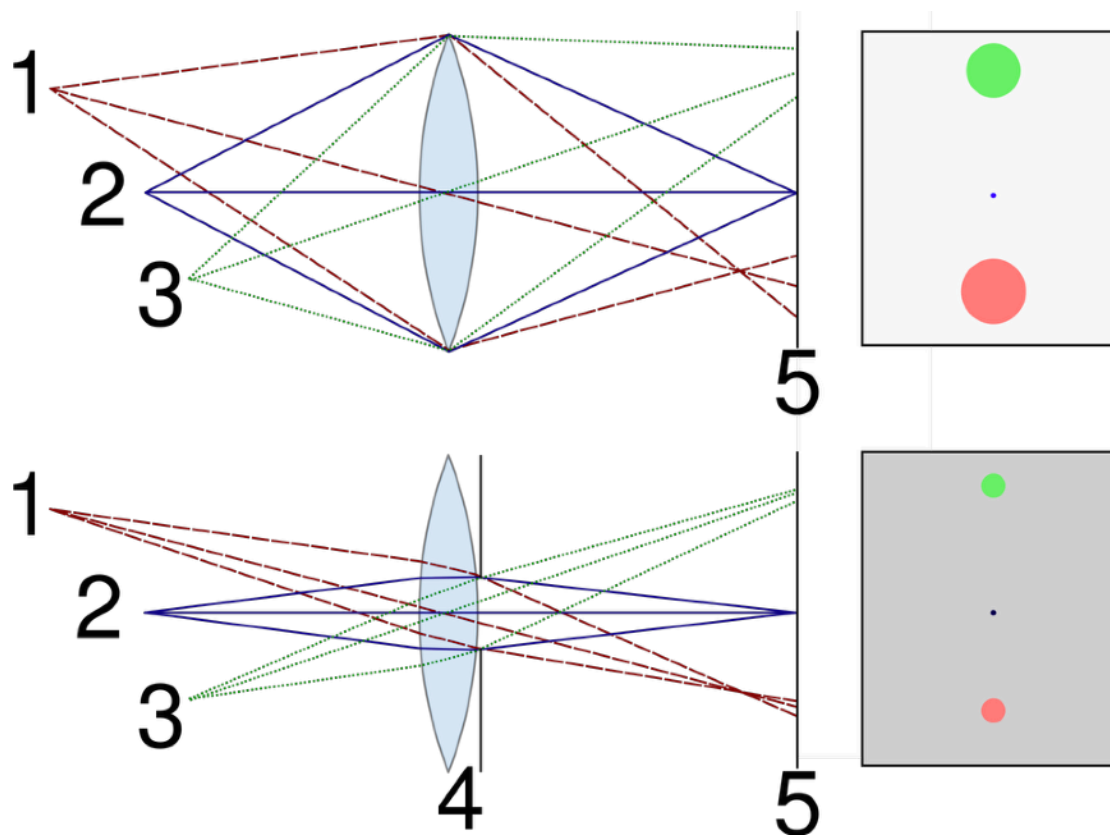
景深

- 散斑大小与深度有关，离焦点越近散斑越小
- 景深范围内的点，其散斑半径小于传感器分辨率



景深取决于光圈大小

- 大光圈、小景深



如何虚化背景

- 大光圈
- 长焦距
- 距离近
- 背景远



手机人像模式如何实现的？



快门

快门工作过程

当快门被触发后

1. 后幕帘开启
2. 前幕帘开启
--曝光开始
3. 后幕帘关闭
--曝光结束
4. 前幕帘关闭

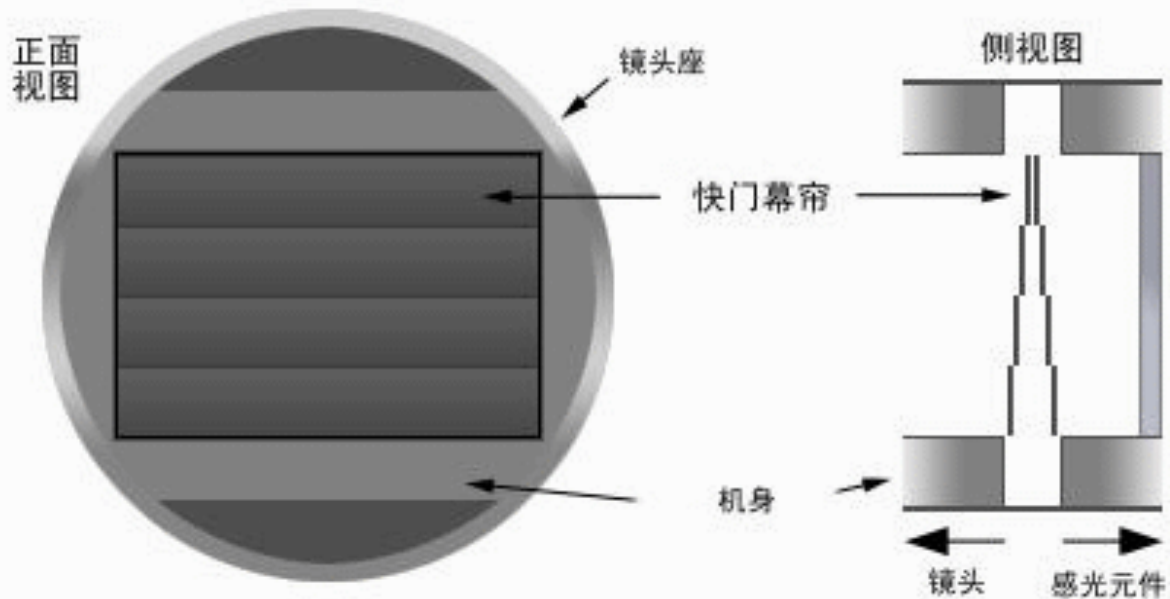


Fig 1.6.1: 快门工作过程

快门速度

- 快门速度控制曝光时间



快门速度

- 快门速度控制曝光时间
- 像素值等于光强在曝光时间内的积分



快门特效



不同快门速度下拍摄的流水

快门特效



Light Paint

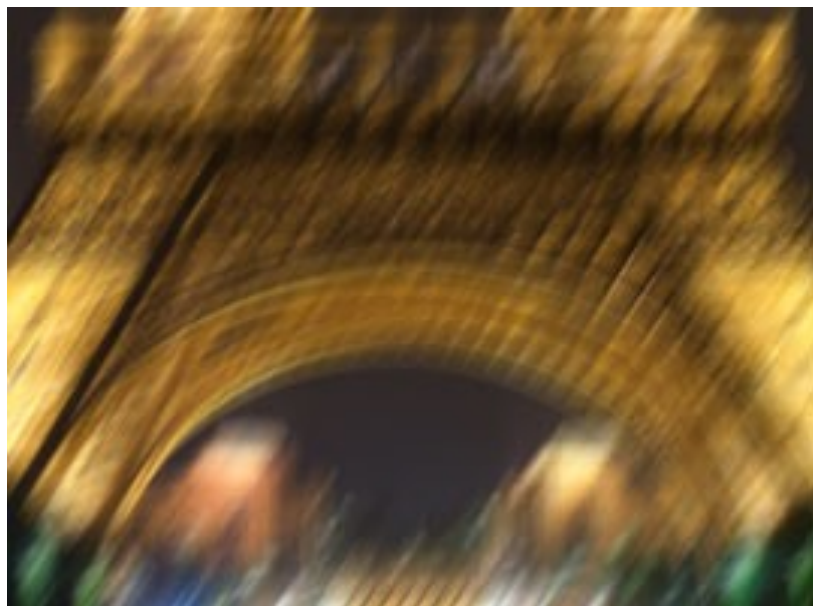
图像模糊的原因

- 镜头失焦
 - 焦外模糊
 - 深度不同模糊程度不同



图像模糊的原因

- 相机抖动
 - 拍摄时相机不稳
 - 全部画面被模糊



如何得到清晰影像？

- 提高快门速度
 - 大光圈
 - 高ISO
 - 单反相机贵的原因

The-Digital-Picture.com Reviews



如何得到清晰影像？

- 硬件消除抖动
 - 三脚架
 - 不便携

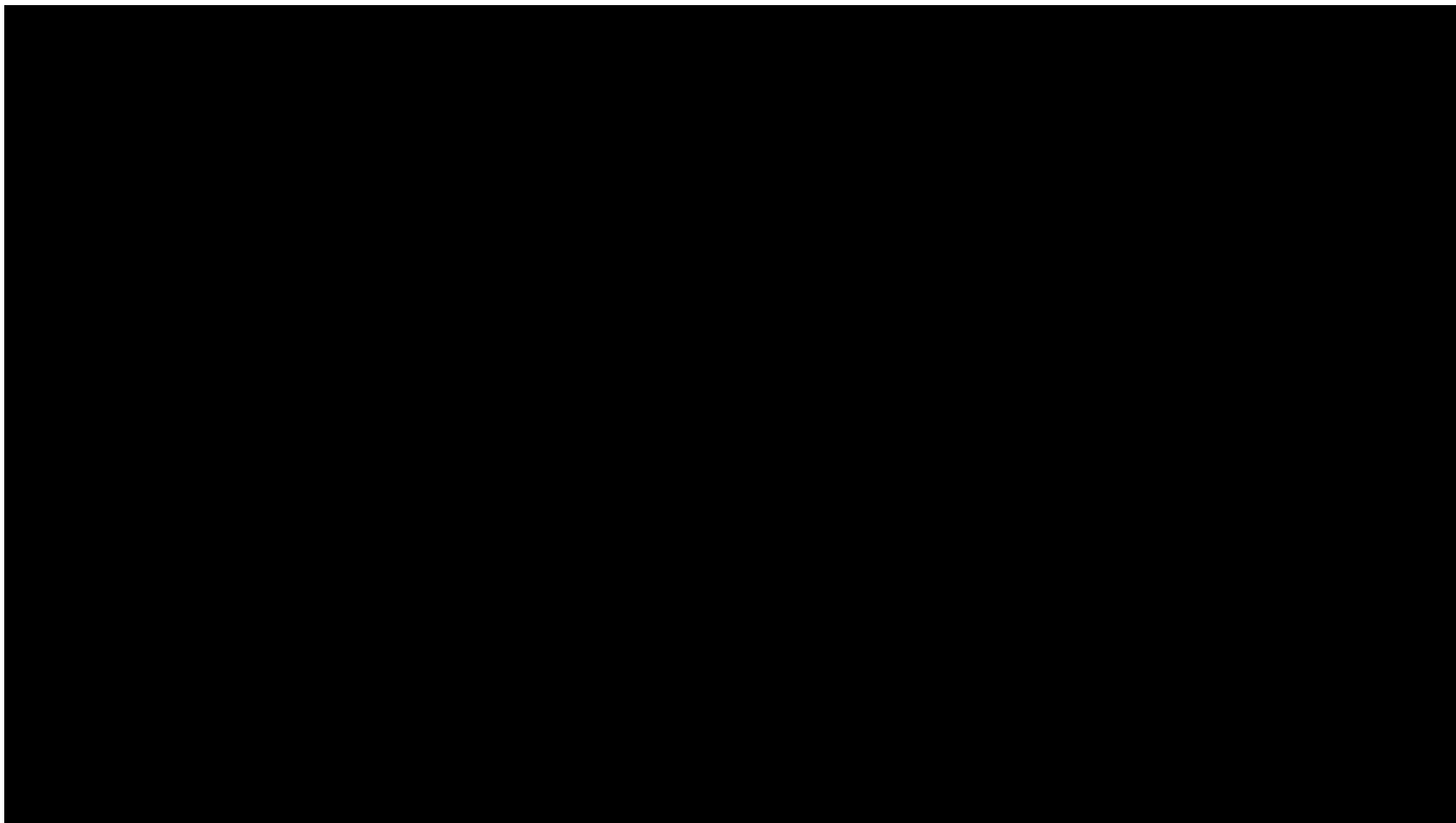


如何得到清晰影像？

- 硬件消除抖动
 - 光学防抖
 - 结合IMU等传感器信息
 - 贵



如何得到清晰影像？



图像去模糊

- 如何设计算法实现图像去模糊？



图像模糊的数学模型

- 如何用数学模型描述图像模糊?

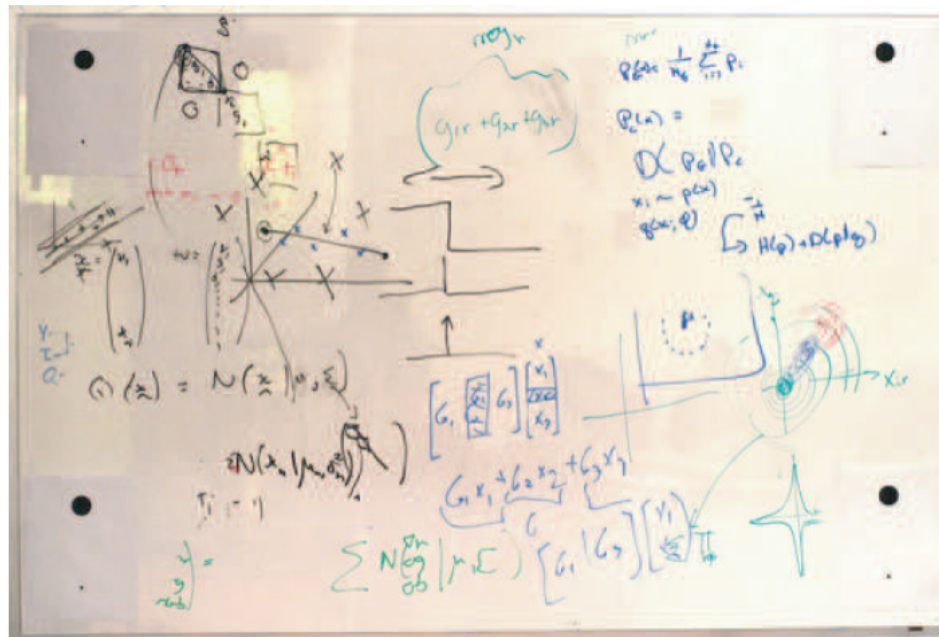






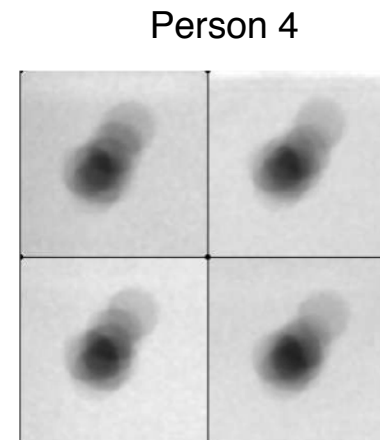
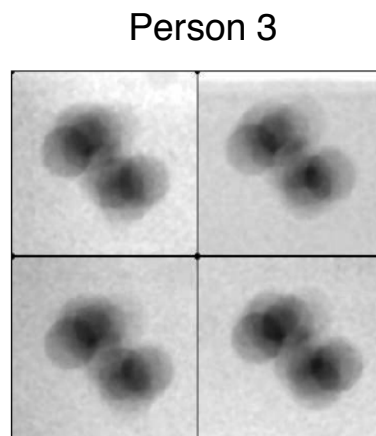
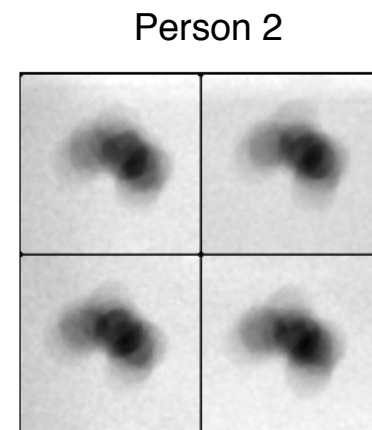
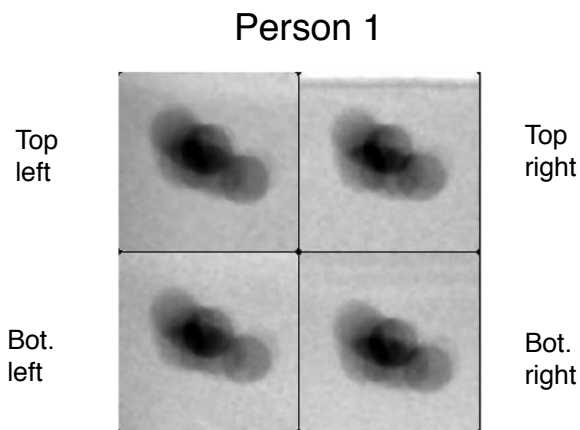
图像模糊的数学模型

手持相机拍摄带有四个点标志的白板，曝光时间1秒钟



图像模糊的数学模型

- 四个角模糊基本相同
- 模糊的形状取决于相机抖动轨迹



模糊的卷积模型

- 把模糊图样平移复制到原图像有像素值的地方
- 可以用卷积描述该过程
- 模糊图像称为卷积核

$$G[i, j] = \sum_{u, v} F[u, v] H[i - u, j - v]$$

0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0

$F[x, y]$



a	b	c
d	e	f
g	h	i

$H[u, v]$



a	b	c		a	b	c
d	e	f		d	e	f
g	h	i		g	h	i
a	b	c		a	b	c
d	e	f		d	e	f
g	h	i		g	h	i

$G[x, y]$

模糊的卷积模型

- 抖动模糊核取决于
相机运动轨迹
- 失焦模糊核取决于
光圈形状



图像模糊的数学表述



模糊图像
(拍摄的)

=



清晰图像
(要求解的)

⊗



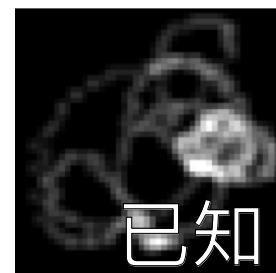
模糊核



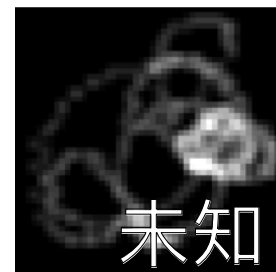
卷积算子

去模糊 = 去卷积

- 非盲去卷积
(Non-blind, NBID)



- 盲去卷积
(Blind, BID)



NBID

- 是一个经典的问题

- Trott, T., “The Effect of Motion of Resolution”,
Photogrammetric Engineering, Vol. 26, pp. 819-827, 1960.
- Slepian, D., “Restoration of Photographs Blurred by Image Motion”, Bell System Tech.,
Vol. 46, No. 10, pp. 2353-2362, 1967.

The screenshot shows a Google Scholar search interface. The search bar contains the text "camera shake" and a "Search" button. To the right of the search bar are links for "Advanced Scholar Search", "Scholar Preferences", and "Scholar Help". Below the search bar, a green navigation bar contains "Scholar", "All articles", and "Recent articles". On the right side of this bar, it displays "Results 1 - 10 of about 11,600 for camera shake. (0.07 seconds)". The number "11,600" is circled in red. Below the navigation bar, there is a list of search results. The first result is titled "Camera capable of correcting camera-shake - group of 2" and lists authors H Ootsuka, T Okada, H Masumoto, and M Hamada, along with a US Patent number and date. The second result is titled "Camera-shake preventing device - group of 2" and lists authors K Imafuji and N Terui, along with a US Patent number and date. The third result is titled "Camera shake correction system - group of 4" and lists authors A Misawa, K Ikari, and S Ueda, along with a US Patent number and date. A "Look up definition of st" button is visible on the right side of the results area.

Google Scholar BETA

camera shake Search

Advanced Scholar Search
Scholar Preferences
Scholar Help

Scholar All articles Recent articles Results 1 - 10 of about 11,600 for camera shake. (0.07 seconds)

Look up definition of st

All Results

T Teramoto
S Enomoto
D Gray
M Hamada
A Katayama

[Camera capable of correcting camera-shake - group of 2 »](#)
H Ootsuka, T Okada, H Masumoto, M Hamada - US Patent 5,561,485, 1996 - patentstorm.us
Camera capable of correcting camera-shake - US Patent 5561485 from Patent Storm.
A camera comprises an angular velocity sensor for detecting camera-shake. ...
Cited by 26 - Related Articles - Cached - Web Search

[Camera-shake preventing device - group of 2 »](#)
K Imafuji, N Terui - US Patent 5,337,098, 1994 - Google Patents
... when it is detected that said bat -tery has been consumed beyond a predetermined amount, said control means starts compensation of the camera shake in response ...
Cited by 22 - Related Articles - Web Search

[Camera shake correction system - group of 4 »](#)
A Misawa, K Ikari, S Ueda... - US Patent 5,041,852, 1991 - Google Patents
... Misawa et al. [il] Patent Number: [45] Date of Patent: [54] CAMERA SHAKE CORRECTION ...
FIG. 27 PRIOR ART 7B Page 23. 5,041,852 CAMERA SHAKE CORRECTION SYSTEM ...
Cited by 27 - Related Articles - Web Search

[Camera capable of correcting camera-shake - group of 6 »](#)

NBID基本模型

- $G = F \otimes H$
 - G: 拍摄到的图像 (已知)
 - F: 需要求解的图像 (未知)
 - H: 卷积核 (已知)



频域解卷积

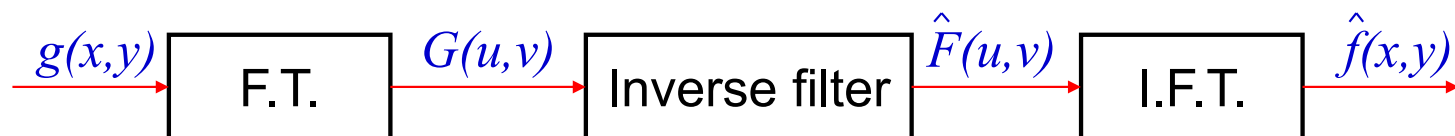
- 空域的卷积 = 频域的乘积

- $FFT(G) = FFT(F \otimes H) = FFT(F) \times FFT(H)$

- 空域解卷积 = 频域的除法

- $F = IFFT(FFT(G) \div FFT(H))$

- 通常称为反向滤波 Inverse filter



Example

- Gaussian blur

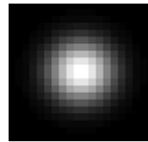
original



$f(x,y)$

*

$$\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-r^2/2\sigma^2}$$



$h(x,y)$



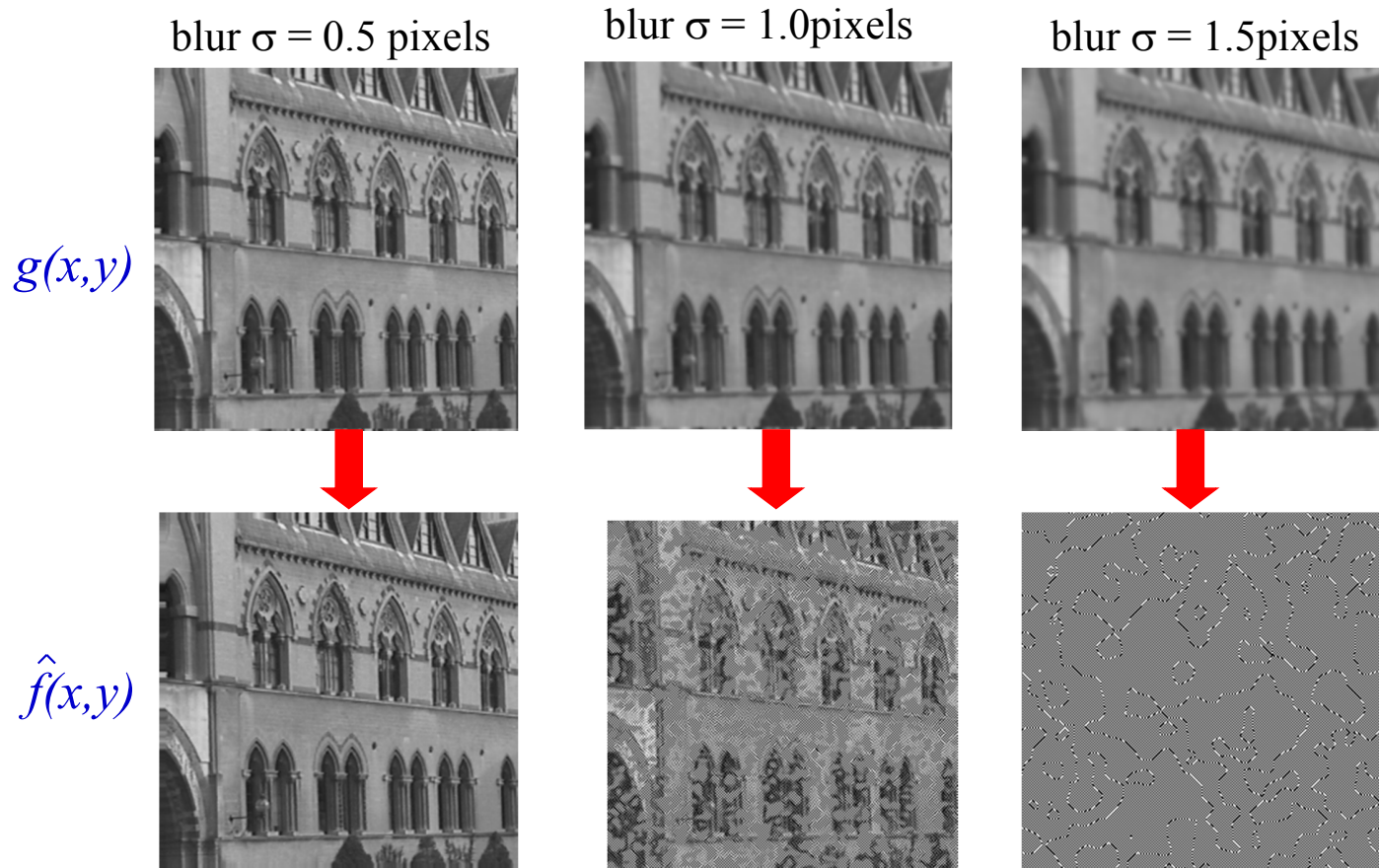
blurred



$g(x,y)$

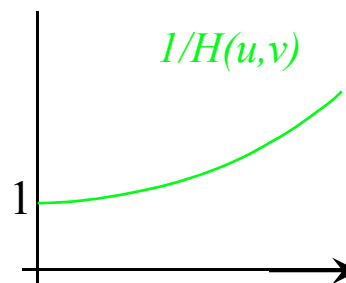
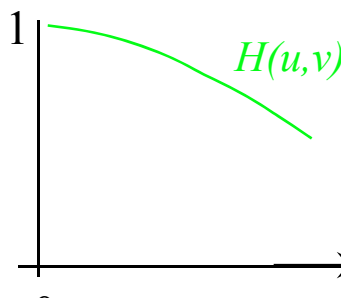
Example

- Inverse filtering results $\hat{F}(u,v) = G(u,v) / H(u,v)$



频域解卷积的问题

- 模糊核一般可以认为是低通滤波器
- Inverse filter 会放大高频成分



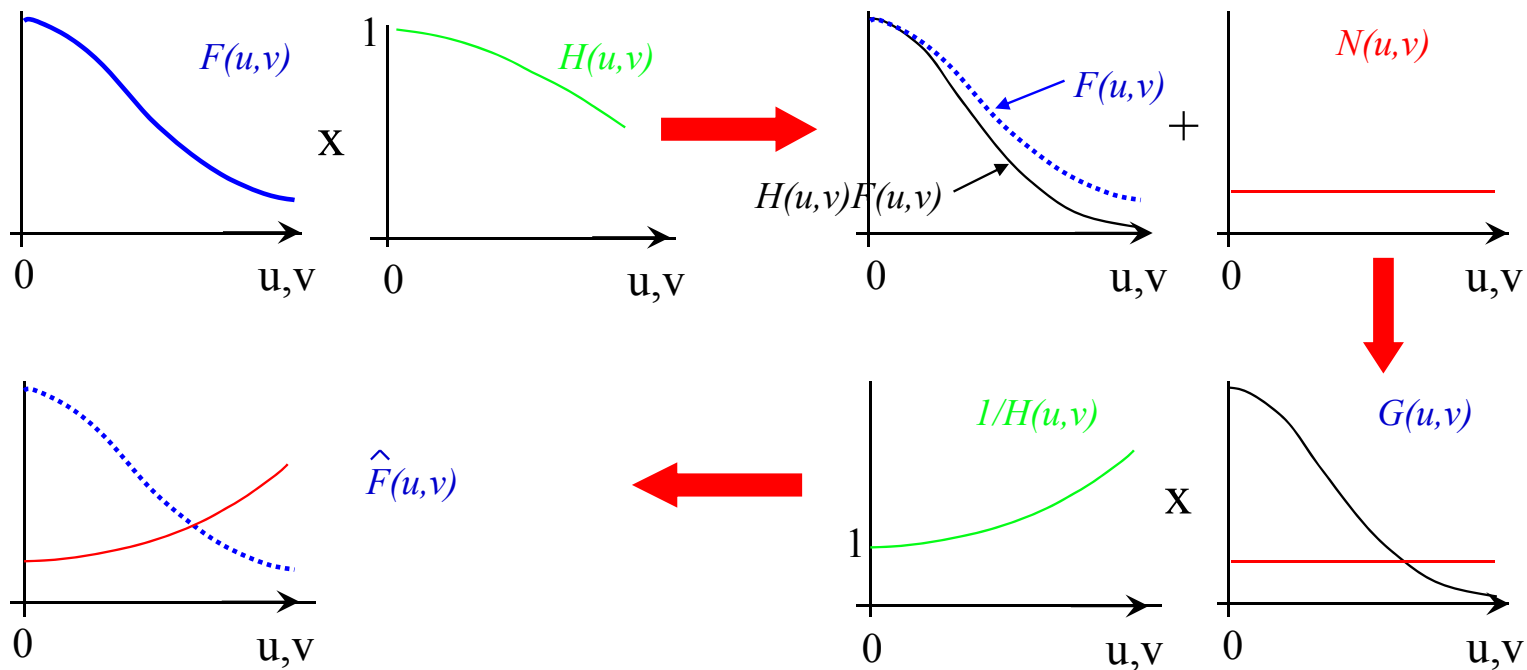
- Inverse filter 也会放大噪声

$$G(u, v) = H(u, v) F(u, v) + N(u, v)$$

$$\hat{F}(u, v) = G(u, v) / H(u, v) = F(u, v) + N(u, v) / H(u, v)$$

频域解卷积的问题

- Inverse filter 会放大高频噪声



维纳滤波

- 反向滤波的时候抑制高频

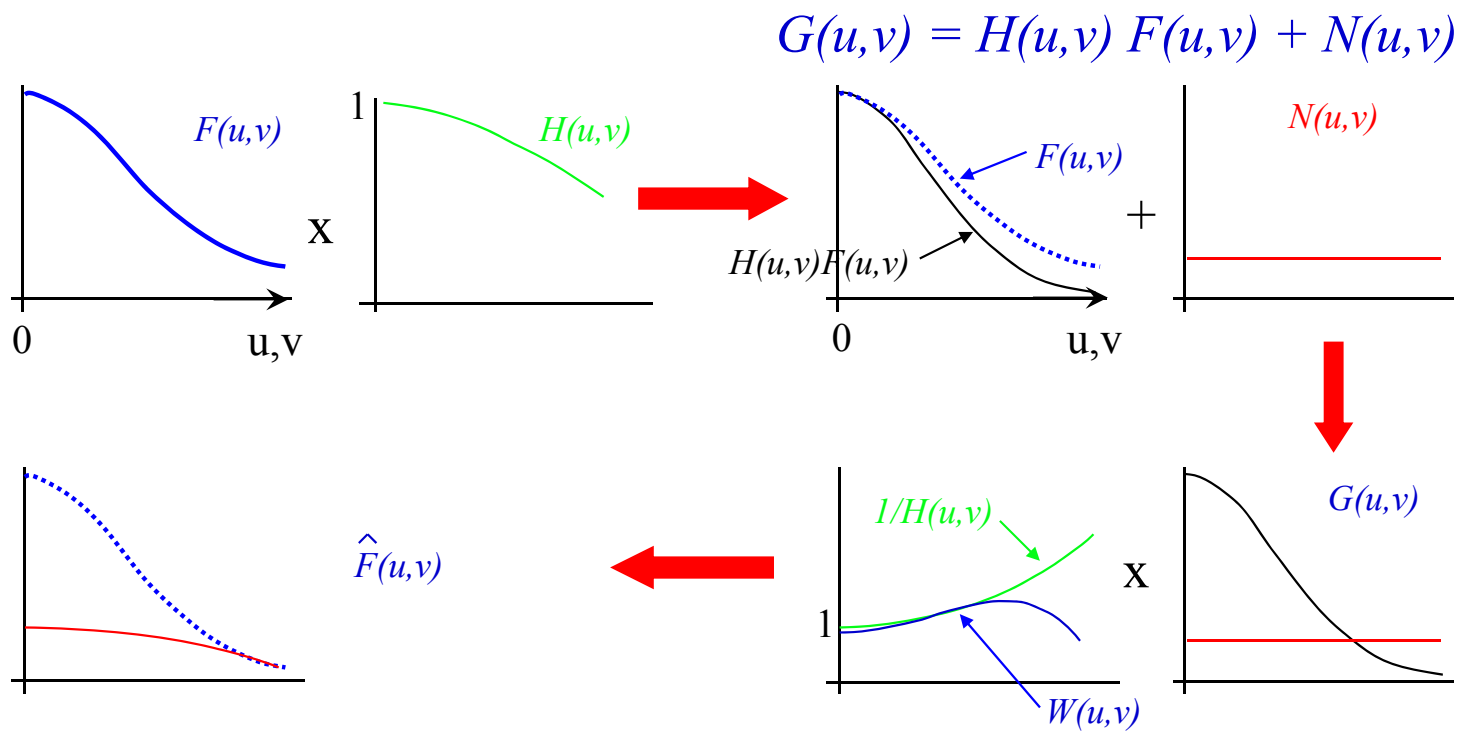
$$\hat{F}(u, v) = W(u, v) G(u, v)$$

$$W(u, v) = \frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + K(u, v)}$$

- If $K = 0$ then $W(u, v) = 1 / H(u, v)$, i.e. an inverse filter
- If $K \gg |H(u, v)|$ for large u, v , then high frequencies are attenuated
- K is set to a constant scalar which is determined empirically

维纳滤波

- 反向滤波的时候抑制高频



Example

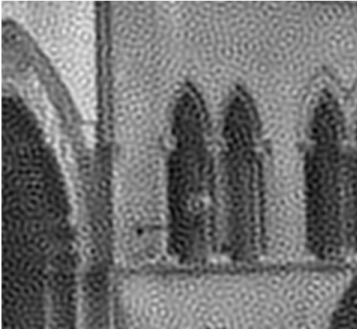
$g(x,y)$



$\hat{f}(x,y)$



$K = 1.0 e -5$



$K = 1.0 e -3$



$K = 1.0 e -1$



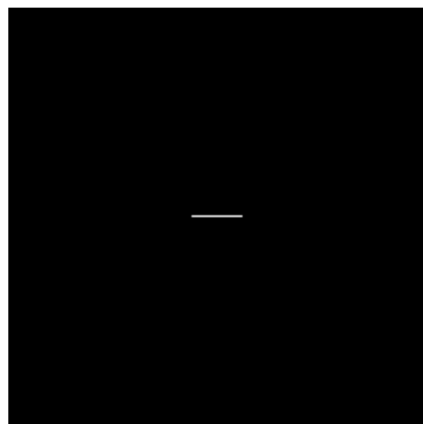
应用



$f(x,y)$

$h(x,y)$

$\hat{f}(x,y)$



应用

- 哈勃太空望远镜
 - 升空时反射镜存在缺陷



Image of star



应用

- 哈勃太空望远镜
 - 升空时反射镜存在缺陷
 - 最初使用去卷积方法消除问题

Before and after corrective optics



数学优化

数学优化

- (Mathematical) Optimization

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f_0(x) \\ & \text{subject to} && f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & && g_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, p \end{aligned}$$

- ▶ $x \in \mathbf{R}^n$ is (vector) variable to be chosen
- ▶ f_0 is the *objective function*, to be minimized
- ▶ f_1, \dots, f_m are the *inequality constraint functions*
- ▶ g_1, \dots, g_p are the *equality constraint functions*

最大化问题可以转化为最小化问题

几乎任何问题都可以建模成数学优化问题来求解

数学优化

- 如何把问题建模成最优化问题?
 - 确定优化变量
 - 制定目标函数
 - 写出限制条件

Example

某军工厂生产甲、乙、丙三种产品，生产三种产品需要A、B两种资源，其单位需求量及利润由下表1给出，问每天生产甲、乙、丙三种产品各多少，可使总利润最大？

	甲	乙	丙	资源的最大量
A	2	3	1	100kg
B	3	3	2	120kg
利润	40元	45元	24元	

$$\max_{x_1, x_2, x_3} 40x_1 + 45x_2 + 24x_3$$

$$s.t. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 100 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 120 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

线性回归问题

- 线性模型：

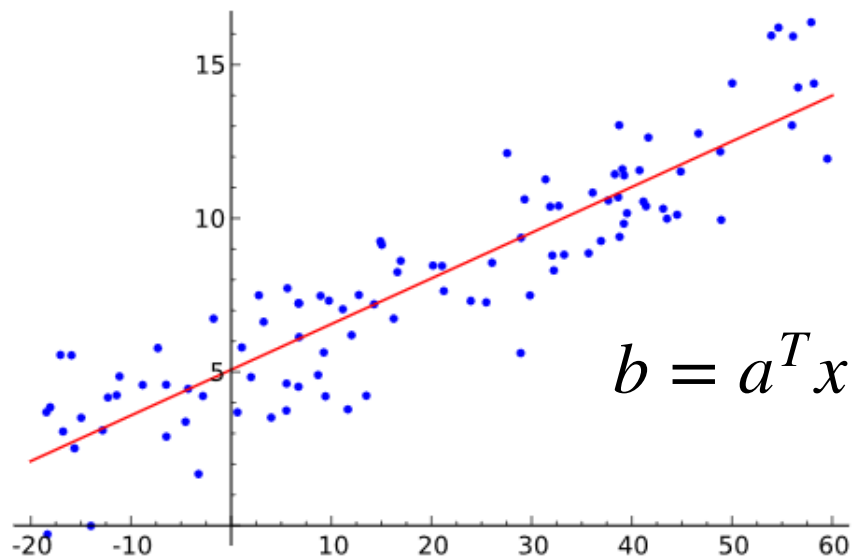
$$b = a^T x$$

输入 a ，输出 b ，系数是 x

- 例如：
 - 学习时间和考试成绩
 - 疫情死亡人数与确诊人数

线性回归问题

- 给定了一系列观测值 (a_i, b_i) , 如何确定 x ?



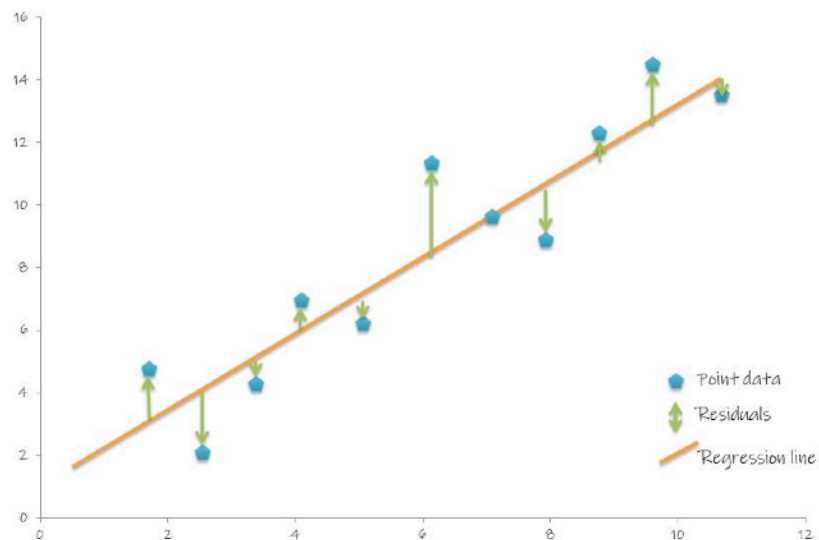
- 从数据中估计模型参数一般称为模型拟合 (model fitting) 或者回归 (regression)

最小二乘法

- 最小二乘法：最小化**均方误差**（Mean Square Error, 简称MSE）

$$\hat{x} = \arg \min_x \sum_i (b_i - a_i^T x)^2$$

- 残差： $r_i = b_i - a_i^T x$
- 残差向量： $R = [r_1, \dots, r_n]^T$



L2范数

$$\text{L2范数: } \|x\|_2 = \sqrt{\sum_i x_i^2}$$

- 向量x的欧式距离

MSE 等于残差向量 $R = [r_1, \dots, r_n]^T$ 的L2范数的平方

$$MSE = \|R\|_2^2$$

最小二乘的统计解释

- 假设数据带有高斯噪音

$$b_i = a_i^T x + n, n \sim G(0, \sigma)$$

- 给定 x 观察到 (a_i, b_i) 的可能性:

$$P[(a_i, b_i)|x] = P[b_i - a_i^T x] \propto \exp -\frac{(b_i - a_i^T x)^2}{2\sigma^2}$$

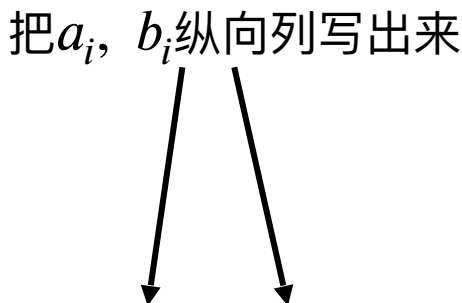
- P通常被称为: **似然函数 / 似然性 (likelihood)**

最小二乘的统计解释

- 假定观测数据点彼此独立，则联合似然函数如下

$$\begin{aligned} & P[(a_1, b_1)(a_2, b_2)\dots|x] \\ &= \prod_i P[(a_i, b_i)|x] \\ &= \prod_i P[b_i - a_i^T x] \\ &\propto \exp - \frac{\sum_i (b_i - a_i^T x)^2}{2\sigma^2} = \exp - \frac{\|Ax - b\|_2^2}{2\sigma^2} \end{aligned}$$

把 a_i, b_i 纵向列写出来



最大似然估计

- 最大似然估计寻找使似然函数最大化的 x

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \arg \max_x P[(a_1, b_1)(a_2, b_2)\dots|x] \\ &= \arg \max_x \exp -\frac{\|Ax - b\|_2^2}{2\sigma^2} \\ &= \arg \min_x \|Ax - b\|_2^2\end{aligned}$$

- 最小二乘对应于高斯噪声假设下的最大似然估计

非线性最小二乘

- 一般的非线性模型: $b = f_x(a)$

- 定义残差
$$R(x) = \begin{pmatrix} b_1 - f_x(a_1) \\ \vdots \\ b_n - f_x(a_n) \end{pmatrix}$$

- 最大似然估计等效于最小化MSE

$$\hat{x} = \arg \min_x \|R(x)\|_2^2$$

病态问题

- 病态问题指的是问题的解不唯一

例如： $Ax = b$ 当方程数小于变量数

- 正则化：通过添加先验知识来约束解的性质

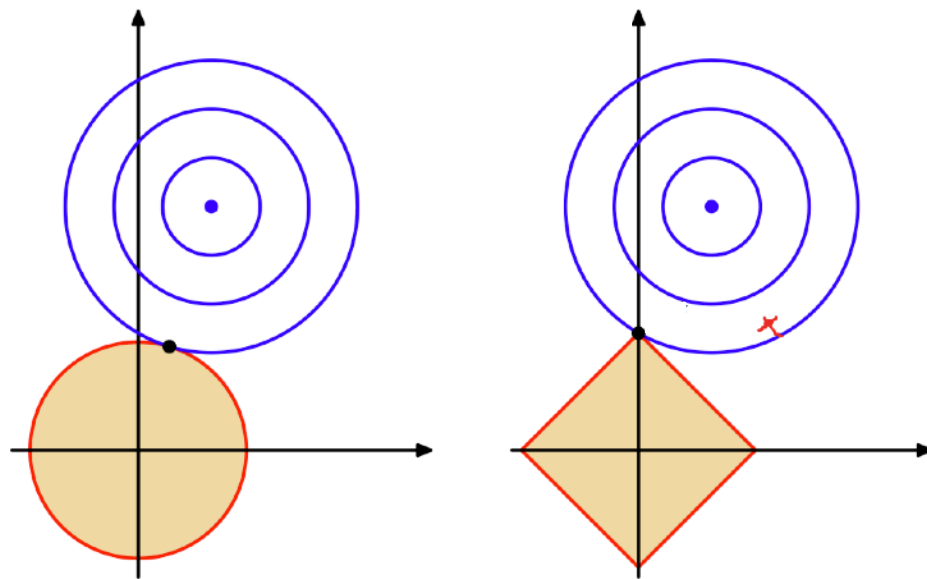
- L2正则： $\min_x \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \|x\|_2^2$

- L2正则可以让x的值趋向于0

- 作用：抑制冗余的变量

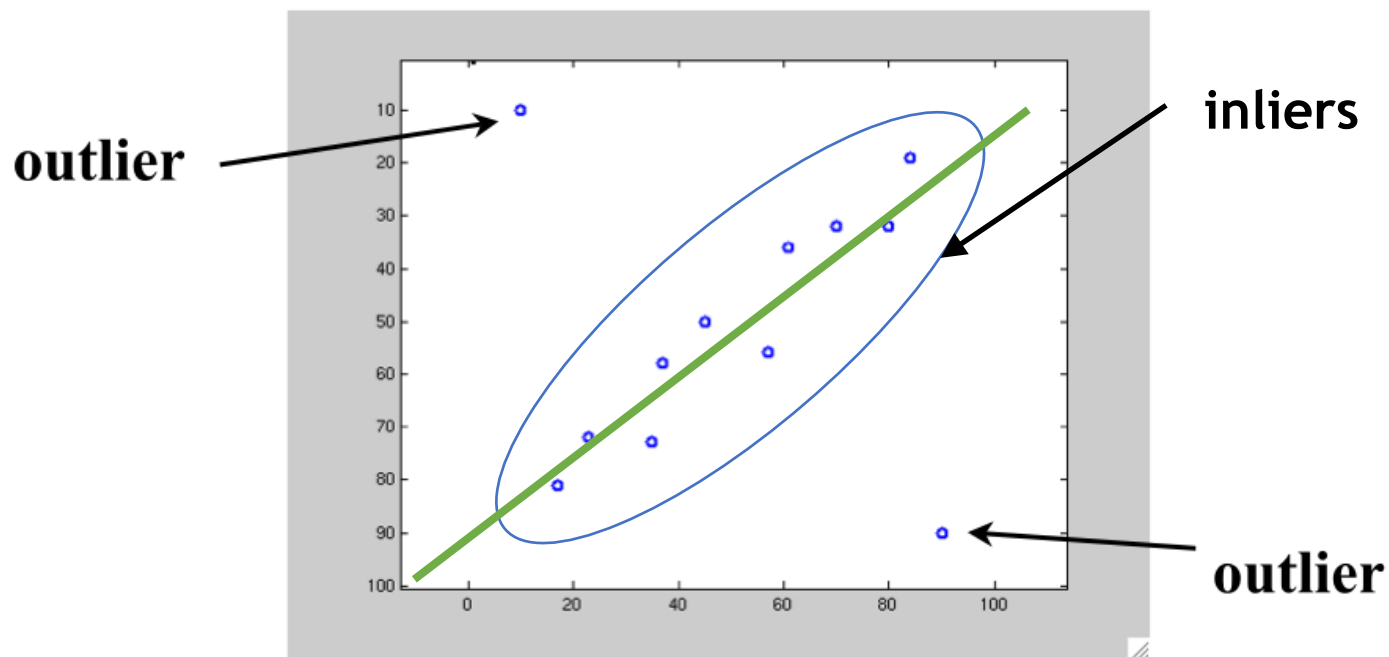
L1正则

- L1范数: $\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$
- L1正则: $\min_x \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \|x\|_1$
- L1正则可以让x变得稀疏



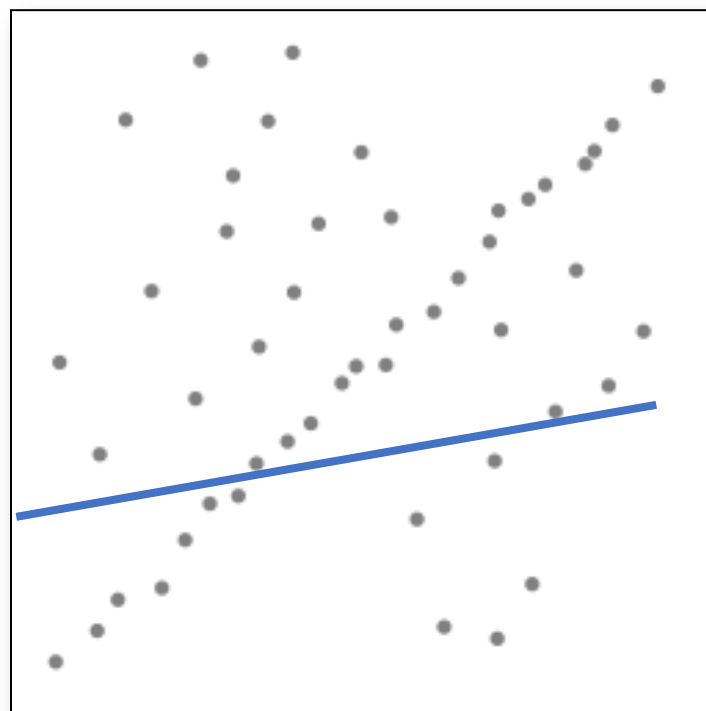
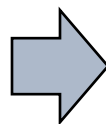
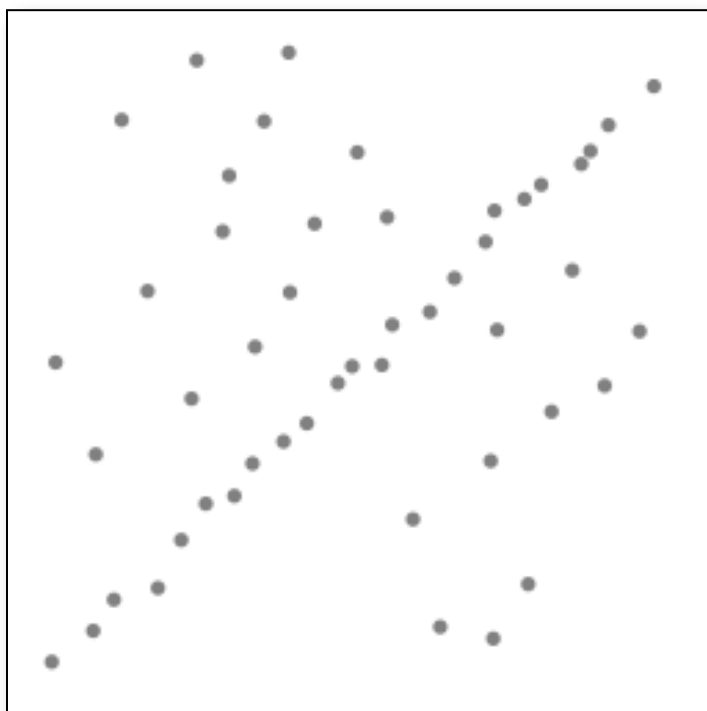
正常值与离群值

- 正常值 (Inlier) : 满足模型/噪音假设的数据点
- 离群值 (Outlier) : 不满足模型/噪音假设的错误点



离群值

- 离群值会让最小二乘回归失败

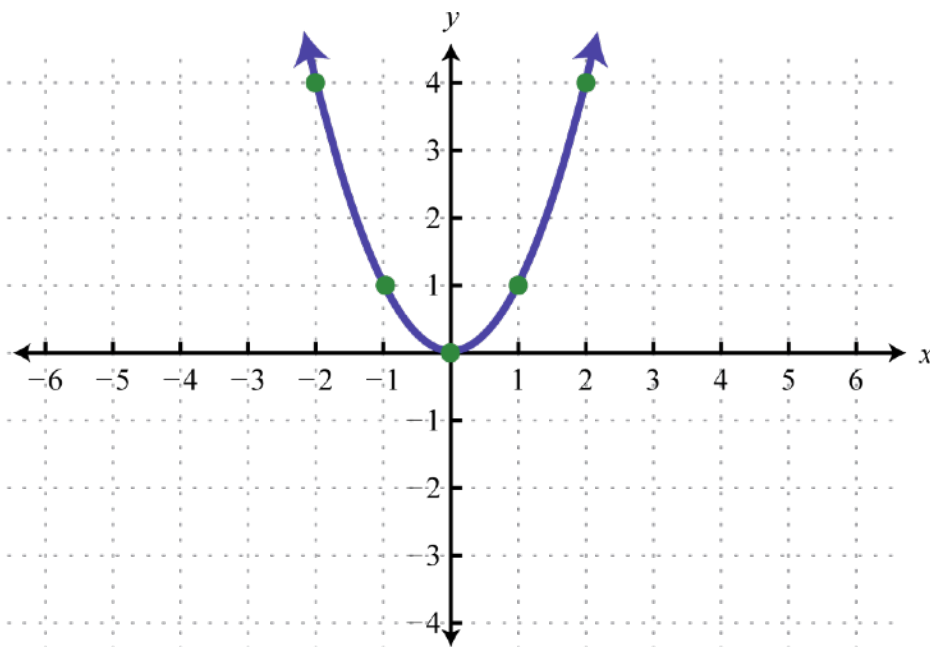


离群值

- 为什么离群值会让最小二乘回归失败
 - MSE（平方误差）与残差平方成正比
 - 受离群值影响过大

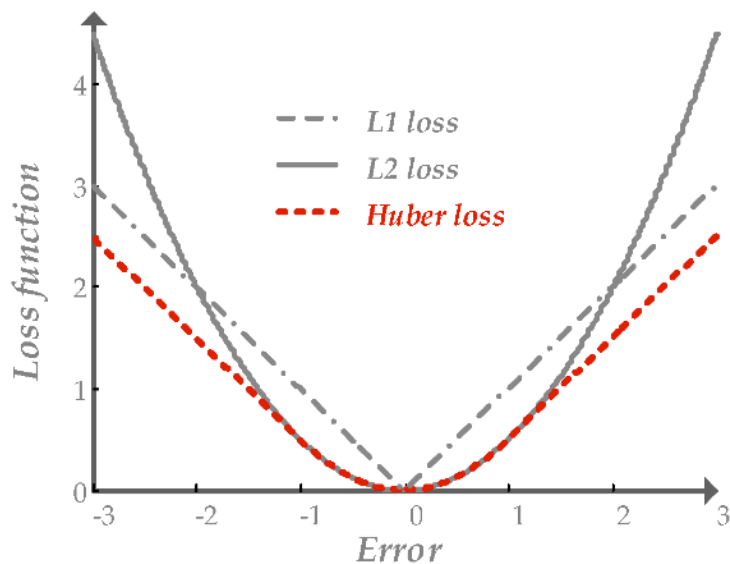
$$f(x) = x^2$$

x	$f(x)$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4



鲁棒估计

- 如何降低离群值的影响？
 - 用其他目标函数替换MSE，降低对离群值的惩罚
 - 例如L1范数、Huber函数

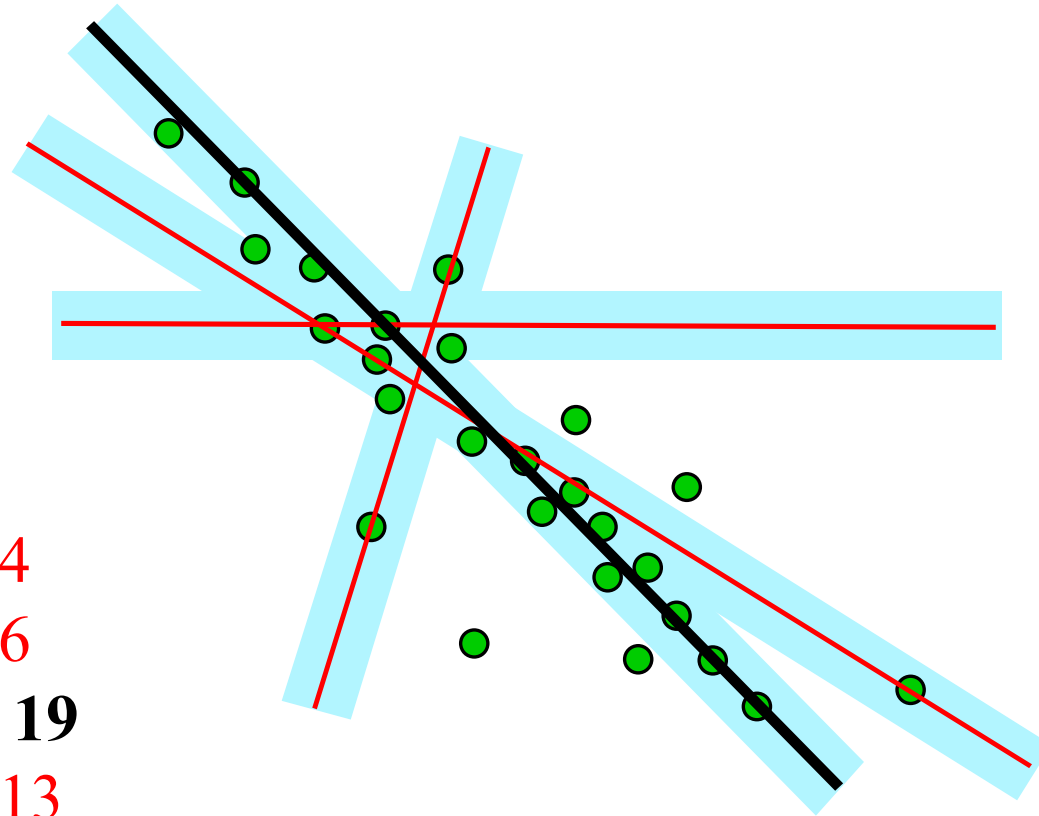


- 这种目标函数一般称为鲁棒函数

RANSAC

- 除了鲁棒函数，还有其他处理离群值的方法
- RANSAC: Random Sample Consensus
 - 目前最常用的处理离群值的方法
 - 核心思想：
 - Inlier的分布总是相似， outlier的分布各有各的不同
 - 用数据点对可能的模型参数进行投票

Ransac Procedure



Count = 4

Count = 6

Count = 19

Count = 13

图像去卷积的最优化问题

- 优化变量?
 - 需要复原的图像
- 目标函数?
 - 图像经过卷积后与给定的模糊图像接近（似然性、Likelihood）
 - 复原的图像比较真实（先验、Prior）

似然函数

- 模糊图像的生成过程：

$$G = F \otimes H + N$$

- 假设噪声N是高斯噪声，似然性可用均方误差MSE来衡量：

$$MSE = \|G - F \otimes H\|_2^2 = \sum_{ij} (G_{ij} - [F \otimes H]_{ij})^2$$

图像去卷积也是线性回归

- Recap: 一维卷积

Signal

1	3	5	3	7	1	3	8	6	4
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Filter

1/4	1/2	1/4
-----	-----	-----

$$1 \times (1/4) + 3 \times (1/2) + 5 \times (1/4) = 3$$

Result

	3								
--	---	--	--	--	--	--	--	--	--

图像去卷积也是线性回归

- Recap: 一维卷积

Signal

1	3	5	3	7	1	3	8	6	4
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Filter

1/4	1/2	1/4
-----	-----	-----

$$3 \times (1/4) + 5 \times (1/2) + 3 \times (1/4) = 4$$

Result

	3	4							
--	---	---	--	--	--	--	--	--	--

图像去卷积也是线性回归

- 一维卷积可以表示为如下矩阵形式

$$y = h * x = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ h_2 & h_1 & & \vdots & \vdots \\ h_3 & h_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & h_3 & \cdots & h_1 & 0 \\ h_{m-1} & \vdots & \ddots & h_2 & h_1 \\ h_m & h_{m-1} & & \vdots & h_2 \\ 0 & h_m & \ddots & h_{m-2} & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & h_{m-1} & h_{m-2} \\ \vdots & \vdots & & h_m & h_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & h_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

h的Toeplitz矩阵

- 二维卷积 $G = F \otimes H$ 也可以最终写成线性模型 $g = \tilde{F}h$

去卷积是病态问题

- 有可能解不唯一：

Solution 1:



Solution 2:



这两组解具有同样的MSE

去卷积是病态问题

- 解决病态问题需要引入关于解的先验信息

Solution 1:



Solution 2:



Solution 1 看上去更自然

自然图像先验

- 自然图像一般是分段平滑的
- 梯度图是稀疏的
- 加入L1正则使得图像梯度稀疏

Image

Natural



Unnatural



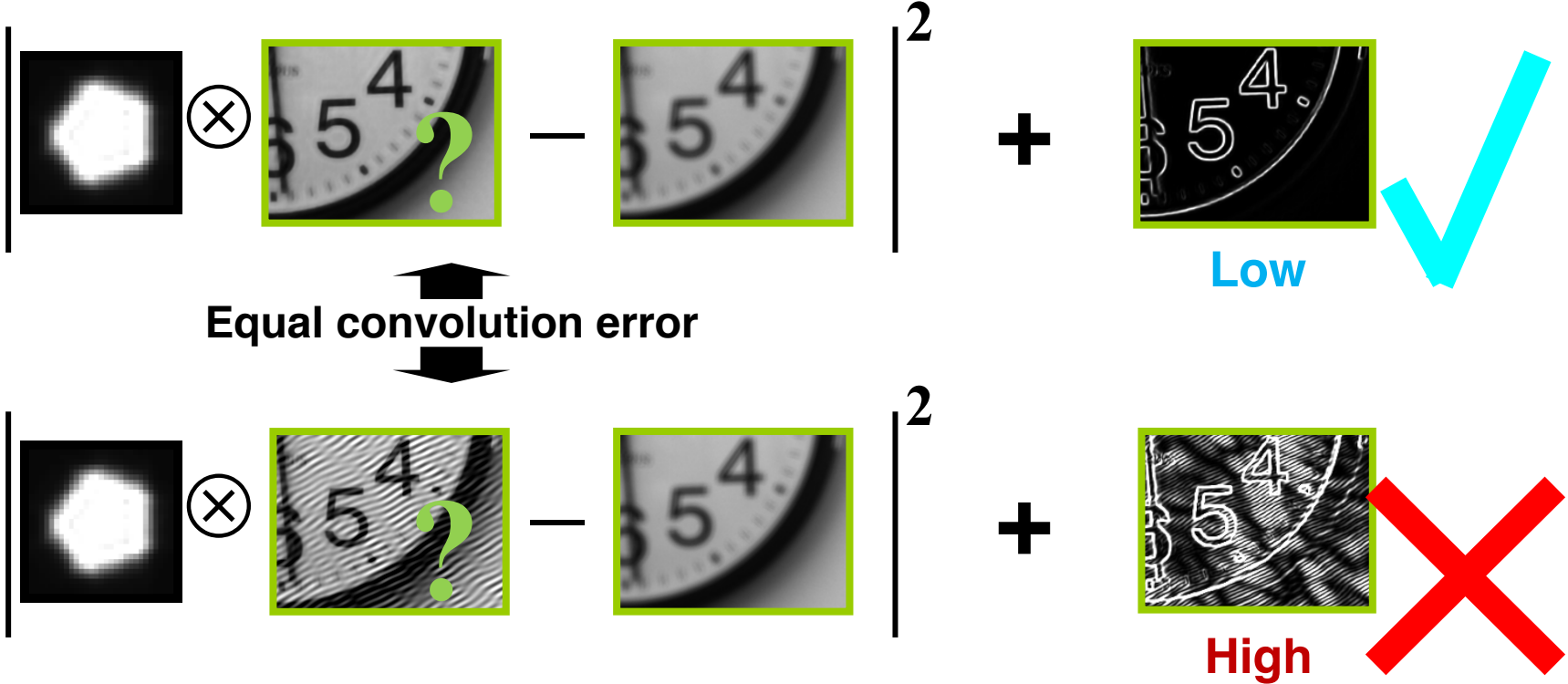
Gradient



带先验的非盲去卷积

- 目标函数 = 似然函数 + 正则项

$$\min_F \|G - F \otimes H\|_2^2 + \|\nabla F\|_1$$



盲去卷积 (BID)

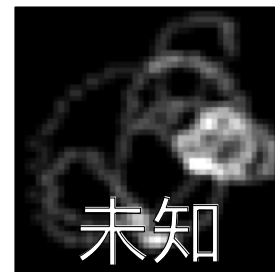
- 卷积核也未知
- 显然更加困难
- 需要更多先验知识!



=



⊗



先验

- 图像梯度稀疏
- 模糊核非负且稀疏
- 优化的目标函数：



$$\min_{F, H} \|G - F \otimes H\|_2^2 + \lambda_1 \|\nabla F\|_1 + \lambda_2 \|H\|_1$$
$$s.t. \quad H \geq 0$$

Removing Camera Shake from a Single Photograph

Rob Fergus, Barun Singh, Aaron Hertzmann,
Sam T. Roweis and William T. Freeman

SIGGRAPH 2006

Massachusetts Institute of Technology
and
University of Toronto

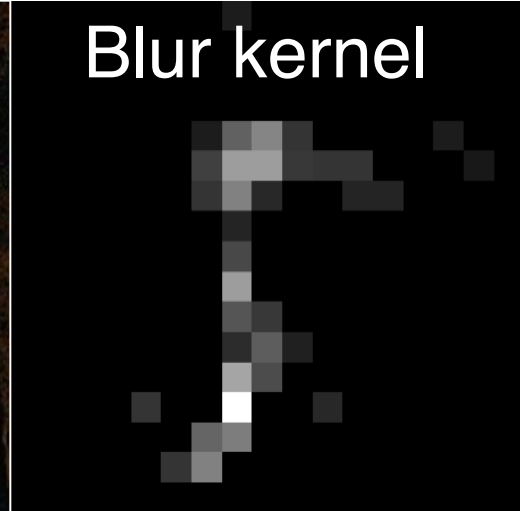
Original photograph



Output



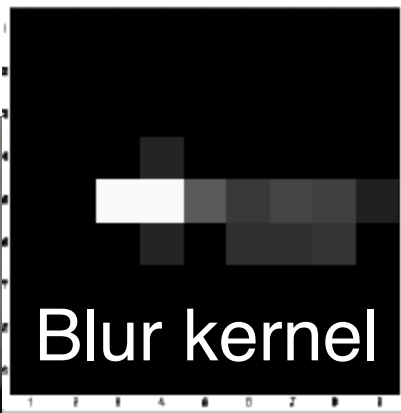
Blur kernel



Original photograph



Output



Blur kernel

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

数值优化方法

最优化问题求解

- 有些问题有解析解
- 比如无约束的线性最小二乘

$$\hat{x} = \arg \min_x \|Ax - b\|_2^2$$

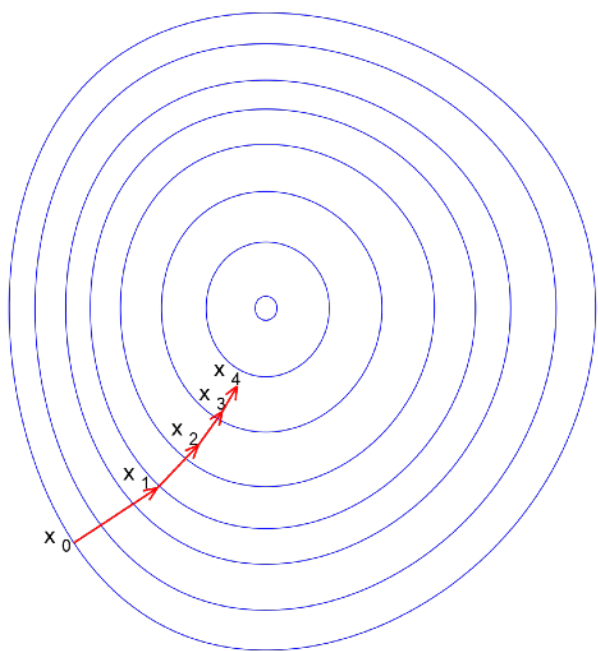
的解为以下线性方程组的解（目标函数关于x求导为0）

$$A^T Ax = A^T b$$

最优化问题求解

- 对于没有解析解的问题：寻找一系列使目标函数不断下降的变量值完成优化

$$F(x_0) > F(x_1) > \dots > F(x_k) > \dots$$



梯度下降

- $x \leftarrow x_0$ %初始化
- while not converge
 - $p \leftarrow \text{descending_direction}(x)$ %确定下降方向
 - $\alpha \leftarrow \text{descending_step}(x, p)$ %确定步长
 - $x \leftarrow x + \alpha p$ %更新变量

下降方向的确定

- 对目标函数 $F(x)$ 在 x_0 上进行一阶Taylor展开

$$F(x_0 + \Delta x) \approx F(x_0) + J_F \Delta x$$

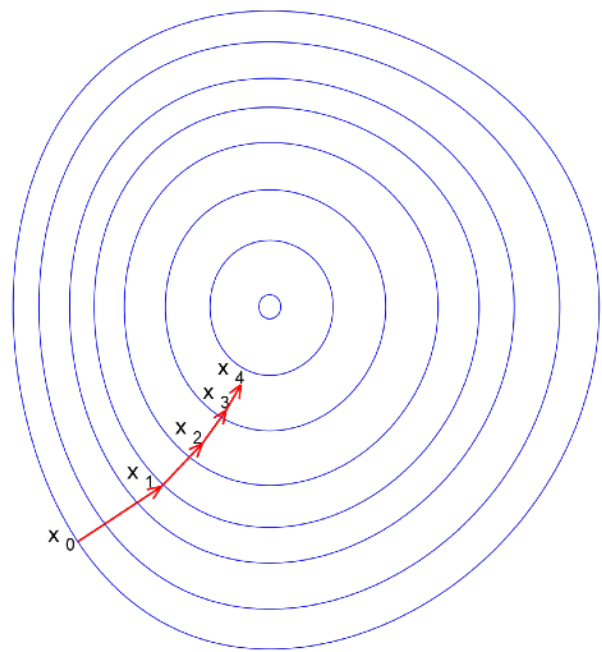
- 当 $J_F \Delta x < 0$ 时，函数的值会下降（ Δx 要足够小）

最速下降法

- $F(x_0 + \Delta x)$ 何时下降速度最快
 - 当 Δx 的方向与 $-J_F^T$ 相同时
 - $p \leftarrow -J_F^T$ (负梯度方向)

- 算法:

- $x \leftarrow x_0$
- while not converge
 - $x \leftarrow x - \alpha J_F^T$



梯度方向垂直于等高线

最速下降法

- 步长 α 如何确定?

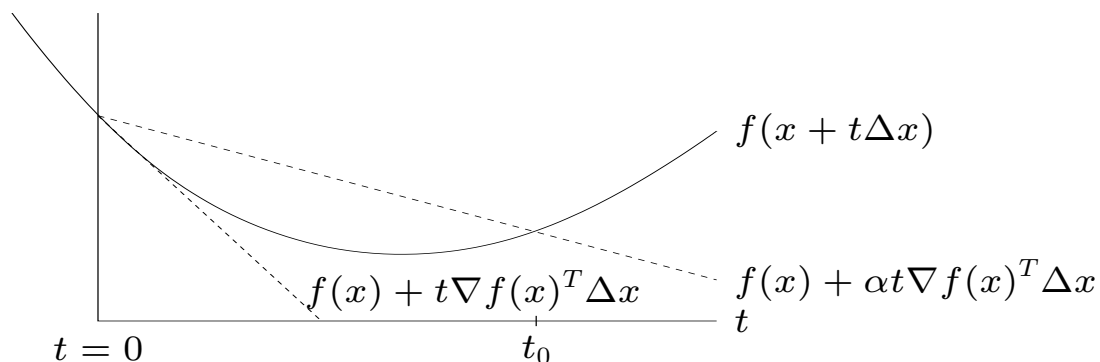
exact line search: $t = \operatorname{argmin}_{t>0} f(x + t\Delta x)$

backtracking line search (with parameters $\alpha \in (0, 1/2)$, $\beta \in (0, 1)$)

- starting at $t = 1$, repeat $t := \beta t$ until

$$f(x + t\Delta x) < f(x) + \alpha t \nabla f(x)^T \Delta x$$

- graphical interpretation: backtrack until $t \leq t_0$



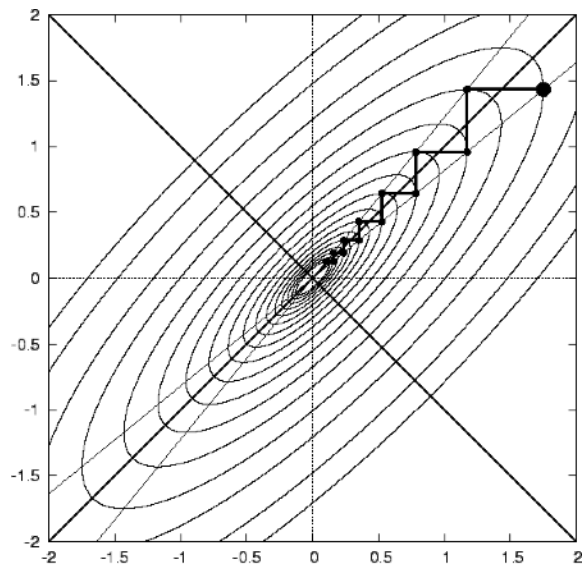
最速下降法

- 优点:

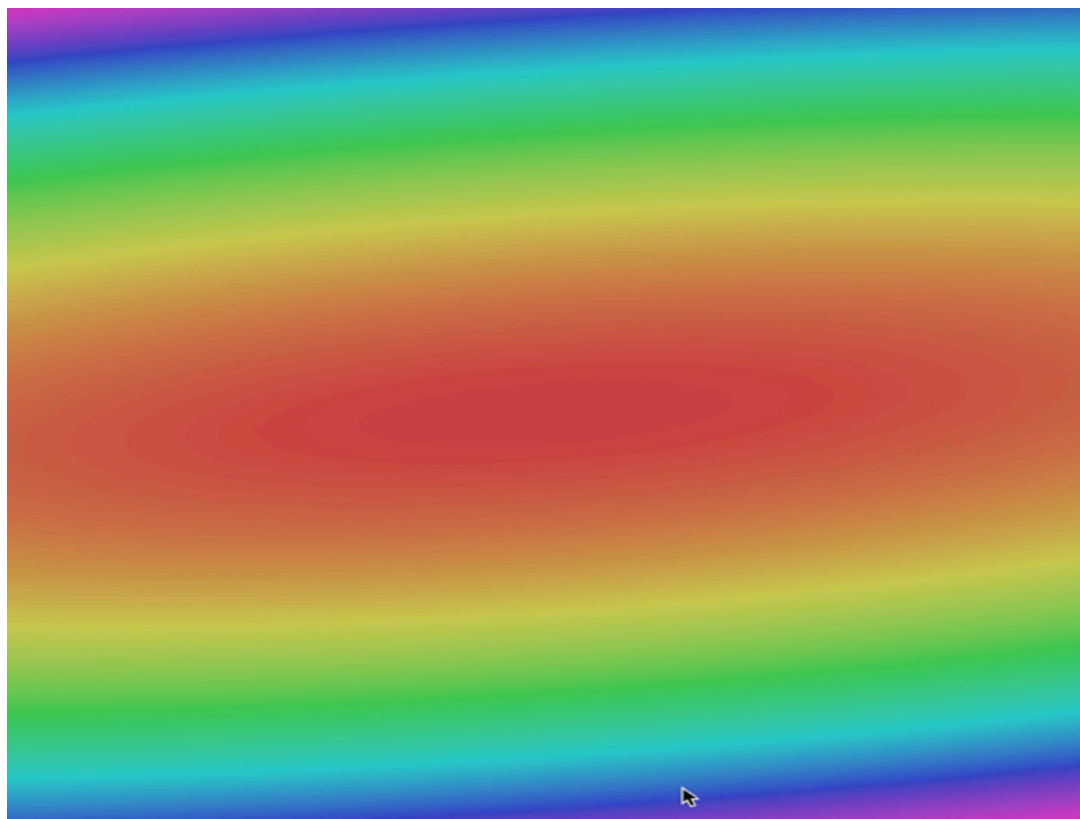
- 实现简单计算量少
- 在距离最优值较远时往往表现很好（启动快）

- 缺点:

- 在最优值附近收敛缓慢
- 当能量函数性质不好时会浪费很多迭代
- 为什么收敛慢?
 - 只利用了一阶梯度信息
 - 没有利用曲率信息



最速下降法



牛顿法

- 利用目标函数的二阶导数（曲率）信息
- 在 x_k 附近进行二阶展开

$$F(x_k + \Delta x) \approx F(x_k) + J_F \Delta x + \frac{1}{2} \Delta x^T H_F \Delta x$$

- 求解最小化 $F(x_k + \Delta x)$ 的 Δx

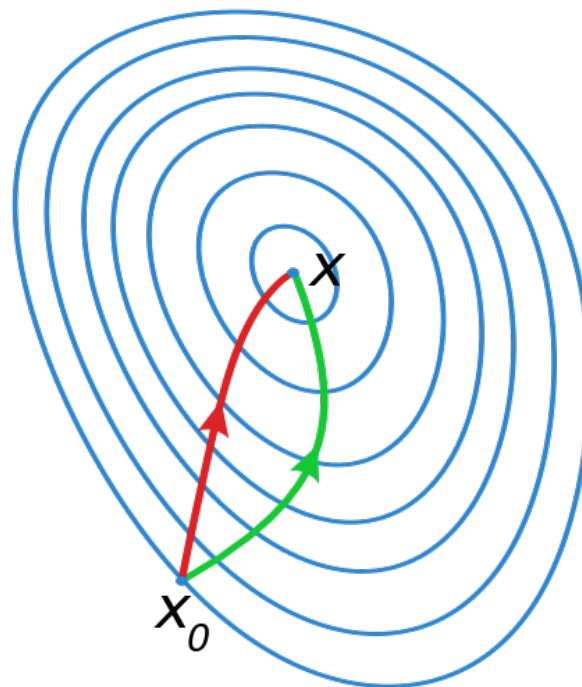
$$H_F \Delta x + J_F^T = 0$$

- 最佳下降方向（牛顿步）：

$$\Delta x = -H_F^{-1} J_F^T$$

牛顿法

- 优点：收敛快
 - 在极值的邻域内二次收敛
 - 适合接近最终结果时使用
- 缺点：Hessian 计算量很大
 - 有时无法计算
 - 能不能近似？



绿色：梯度下降
红色：牛顿法

高斯牛顿法

- 利用问题的性质来近似求解二阶导
 - 最小二乘问题

$$\hat{x} = \arg \min_x \|R(x)\|_2^2$$

- 对R进行一阶近似:

$$\begin{aligned} \|R(x_k + \Delta x)\|_2^2 &\approx \|R(x_k) + J_R \Delta x\|_2^2 \\ &= \underbrace{\|R(x_k)\|_2^2}_{F(x_k)} + \underbrace{2R(x_k)^T J_R \Delta x}_{J_F} + \Delta x^T J_R^T J_R \Delta x \end{aligned}$$

高斯牛顿法

- 此时最优的 Δx 满足

$$J_R^T J_R \Delta x + J_R^T R(x_k) = 0$$

- 最优下降方向:

$$\Delta x = - (J_R^T J_R)^{-1} J_R^T R(x_k)$$

- 对比牛顿法:

- 牛顿步: $\Delta x = - H_F^{-1} J_F^T$

- 高斯牛顿法用 $J_R^T J_R$ 近似Hessian矩阵 H_F

高斯牛顿法

- 优点
 - 不需要Hessian, 容易计算
 - 收敛快
- 缺点
 - 如果 $J_R^T J_R$ 不可逆, 算法会变得不稳定

Levenberg-Marquardt

- LM法通过“正则化”回避这个问题

$$\Delta x = - (J_R^T J_R + \lambda I)^{-1} J_R^T R(x_k)$$

- 对于全部 $\lambda > 0$, $J_R^T J_R + \lambda I$ 一定是正定的

Levenberg-Marquardt

$$\Delta x = - (J_R^T J_R + \lambda I)^{-1} J_R^T R(x_k)$$

- λ 的效果
 - $\lambda \rightarrow \infty$: 梯度下降步, 并且长度短
 - $\lambda \rightarrow 0$: Gauss-Newton 步
- λ 的选择
 - 每轮迭代更新
 - 当下降明显时, $\lambda \downarrow$
 - 当下降不明显时, $\lambda \uparrow$

Levenberg-Marquardt

- 优点:
 - 启动快 ($\lambda \uparrow$)
 - 收敛快 ($\lambda \downarrow$)
 - 不退化 ($J_R^T J_R + \lambda I$ 总是正定)
 - LM = 梯度下降+高斯牛顿

小结

- 图像去模糊
 - 图像模糊的原因：抖动、失焦
 - 图像模糊的数学表述：卷积
 - 图像去模糊的方法：反卷积
- 数学优化
 - 如何建模：目标函数、正则
 - 如何求解：梯度下降、牛顿法、高斯牛顿、LM