相机模型与投影变换

章国锋

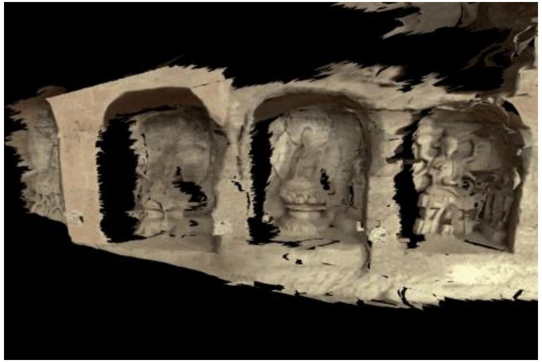
浙江大学**CAD&CG**国家重点实验室

视频场景重建的流程

运动恢复
结构

深度恢复

三维
重建



齐次坐标

在原有的坐标上增加一个维度：

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

新增的维度并不会增加自由度：

$$(x, y, z, w) \quad w \neq 0 \to (x/w, y/w, z/w)$$

齐次坐标

使用齐次坐标判断点是否在线上

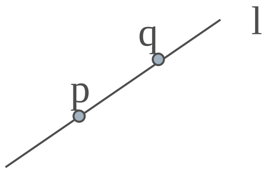
$$l = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} \qquad x^T l = \begin{bmatrix} u & v & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} = 0$$

使用齐次坐标判断点是否在平面上

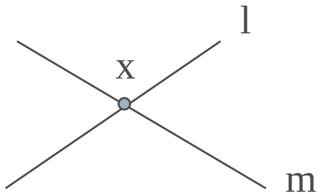
$$\pi = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ d \end{bmatrix} \qquad x^T \pi = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ d \end{bmatrix} = 0$$

齐次坐标

- 两个点定义一条直线: $\mathbf{l} = \mathbf{p} \times \mathbf{q}$

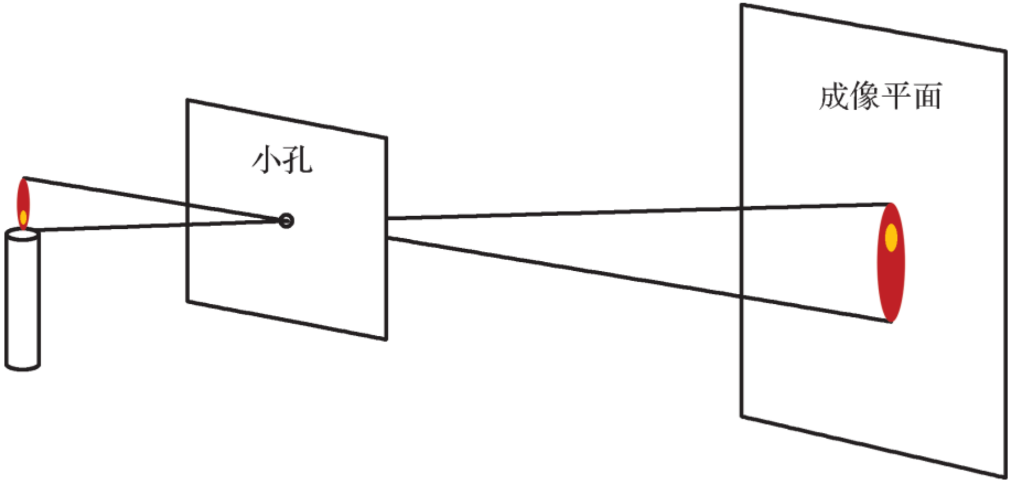


- 两条直线定义一个点: $\mathbf{x} = \mathbf{l} \times \mathbf{m}$



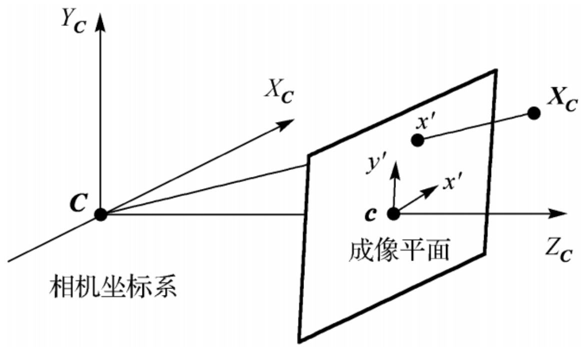
针孔相机模型

针孔成像模型是一个理想的透视投影变换，将三维空间点变换为图像空间的像素点

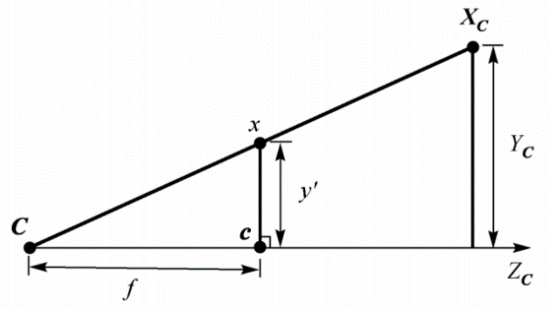


小孔成像原理

针孔相机模型



相机坐标系与像平面坐标系间的几何关系



三维空间点与它在像平面上投影点之间的几何关系

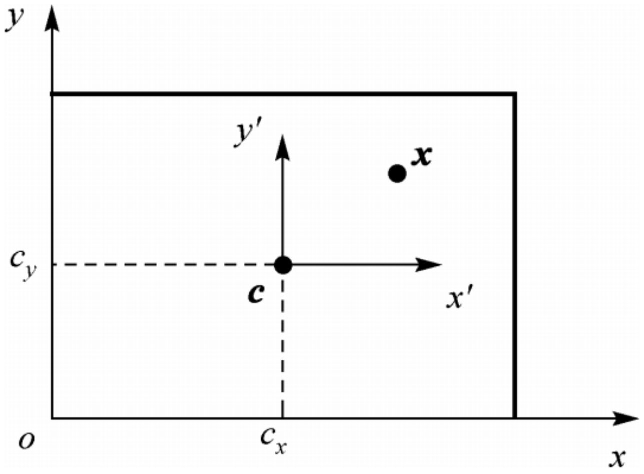
投影方程：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ f \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \end{pmatrix}$$

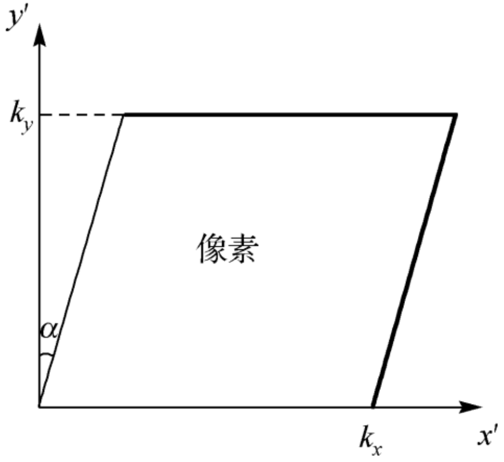
齐次坐标表示：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ f \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \\ 1 \end{pmatrix}$$

内参矩阵



图像空间坐标系的定义



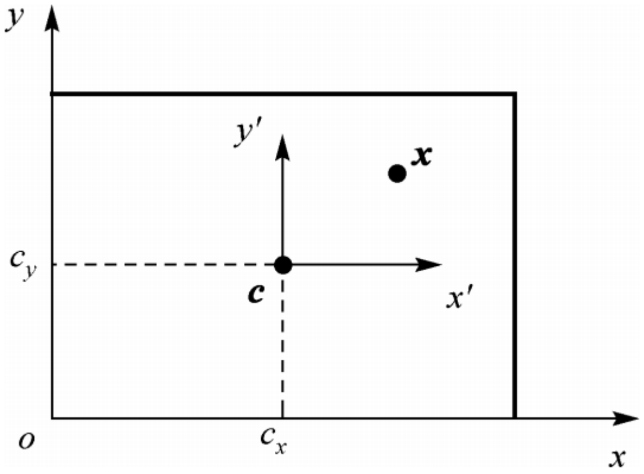
像素形变示意图

投影点 **x**的图像像素坐标 (*x*, *y*) 和它在成像平面上坐标 (*x'*, *y'*) 之间的关系如下

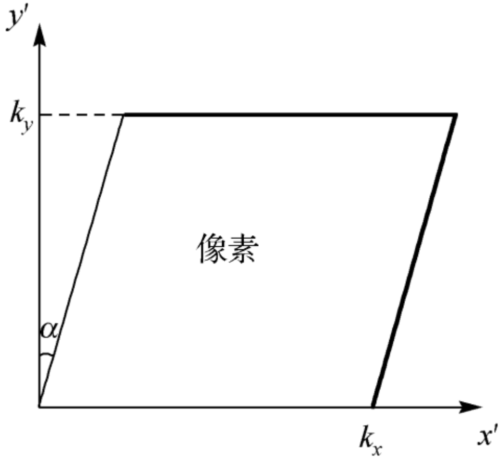
$$x'/k_x = x - c_x$$

$$y'/k_y = y - c_y$$

内参矩阵



图像空间坐标系的定义

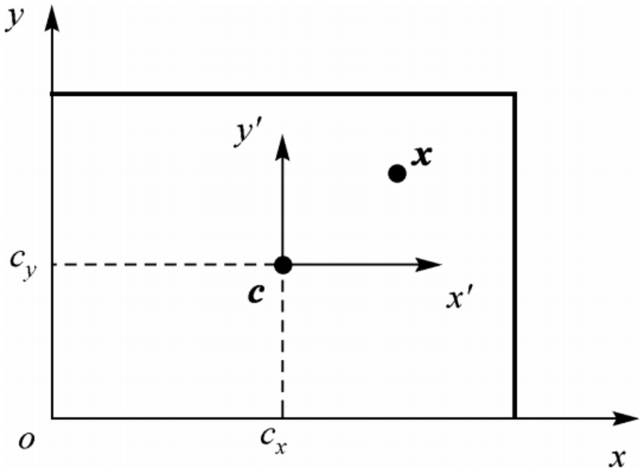


像素形变示意图

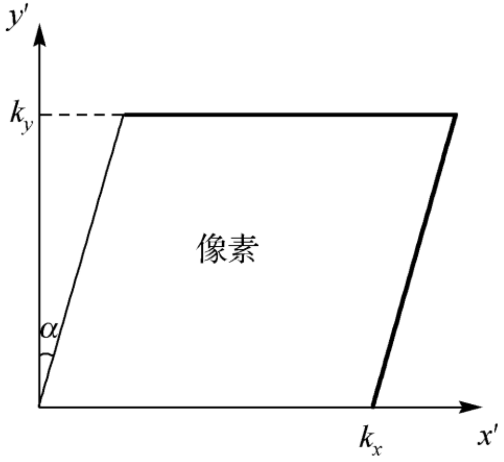
齐次坐标表示：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{f}\begin{bmatrix} \frac{f}{k_x} & & c_x \\ & \frac{f}{k_y} & c_y \\ & & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ f \end{pmatrix}$$

内参矩阵



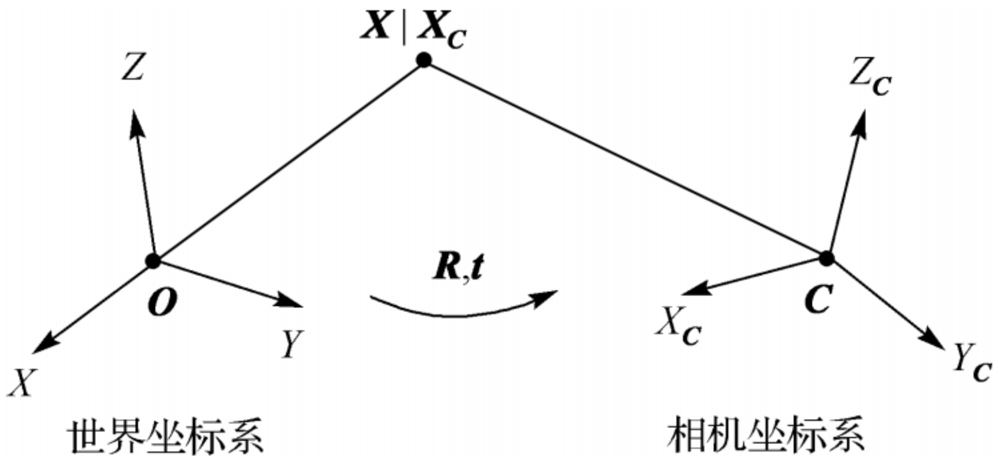
图像空间坐标系的定义



像素形变示意图

考虑像素倾斜畸变： $\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix} \frac{f}{k_x} & \frac{f}{k_y}\tan\alpha & c_x \\ & \frac{f}{k_y} & c_y \\ & & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_x & s & c_x \\ & f_y & c_y \\ & & 1 \end{bmatrix}$

相机的外部参数



$$X_C = [R \mid t]\hat{X} = \left[R \mid -R\tilde{C}\right]\hat{X}$$

透视相机模型

世界坐标系到图像坐标系的变换

$$\hat{x} \sim K X_C = K[R|t]\hat{X}$$

透视投影矩阵 $$P = K[R|t]$$

11个自由度：5+3+3

投影矩阵求解

$$\hat{\boldsymbol{x}} \sim \boldsymbol{P}\hat{\boldsymbol{X}}$$

第 i 个点对

二维图像点坐标

$$\boldsymbol{x}_i = (x_i, y_i)^\top$$

三维点坐标

$$\boldsymbol{X}_i = (X_i, Y_i, Z_i)^\top$$

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_i = \frac{P_{11}X_i + P_{12}Y_i + P_{13}Z_i + P_{14}}{P_{31}X_i + P_{32}Y_i + P_{33}Z_i + P_{34}}$$

$$y_i = \frac{P_{21}X_i + P_{22}Y_i + P_{23}Z_i + P_{24}}{P_{31}X_i + P_{32}Y_i + P_{33}Z_i + P_{34}}$$

投影矩阵求解

$$\hat{x} \sim P\hat{X}$$

第 i 个点对

二维图像点坐标

$$\boldsymbol{x}_i = (x_i, y_i)^\top$$

三维点坐标

$$\boldsymbol{X}_i = (X_i, Y_i, Z_i)^\top$$

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P_{11}X_i + P_{12}Y_i + P_{13}Z_i + P_{14} - x_i P_{31}X_i - x_i P_{32}Y_i - x_i P_{33}Z_i - x_i P_{34} = 0$$

$$P_{21}X_i + P_{22}Y_i + P_{23}Z_i + P_{24} - y_i P_{31}X_i - y_i P_{32}Y_i - y_i P_{33}Z_i - y_i P_{34} = 0$$

投影矩阵求解

$$\boldsymbol{L}=\left[P_{11},P_{12},P_{13},P_{14},P_{21},P_{22},P_{23},P_{24},P_{31},P_{32},P_{33},P_{34}\right]^{\top}$$

给定n个标定点，可以列$2n$个方程

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{L}=0$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1X_1 & -x_1Y_1 & -x_1Z_1 & -x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 & -y_1X_1 & -y_1Y_1 & -y_1Z_1 & -y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_n & Y_n & Z_n & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_nX_n & -x_nY_n & -x_nZ_n & -x_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_n & Y_n & Z_n & 1 & -y_nX_n & -y_nY_n & -y_nZ_n & -y_1 \end{bmatrix}$$

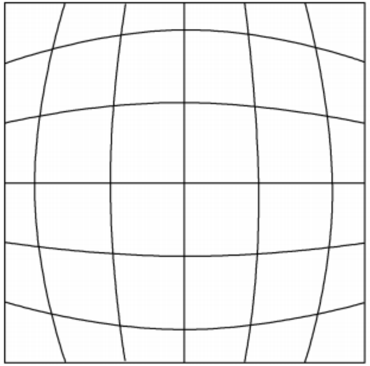
投影矩阵求解

- 线性初始化之后，再通过最小化重投影距离进行非线性优化

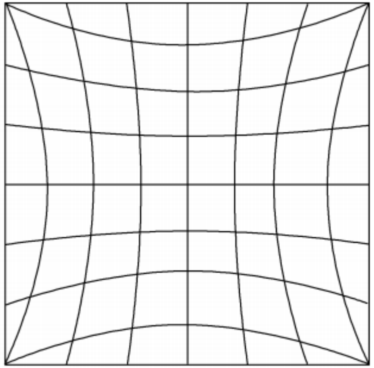
$$\min_{\boldsymbol{P}} \sum_{i=1}^{n} d(\boldsymbol{x}_i, \pi(\boldsymbol{P}\hat{\boldsymbol{X}}_i))^2, \quad \text{s.t.} \ \|\boldsymbol{P}\| = 1$$

通常采用LM (Levenburg-Marquadt) 算法优化

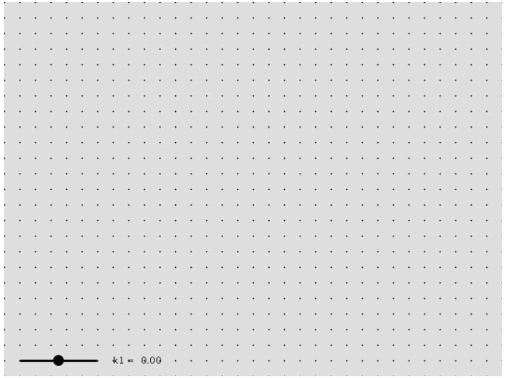
径向畸变



桶形畸变



枕形畸变



径向畸变的效果

(https://jinyu.li/2017/01/10/radial-distortion/)

- 数学模型:

准确的投影点坐标 (x', y')

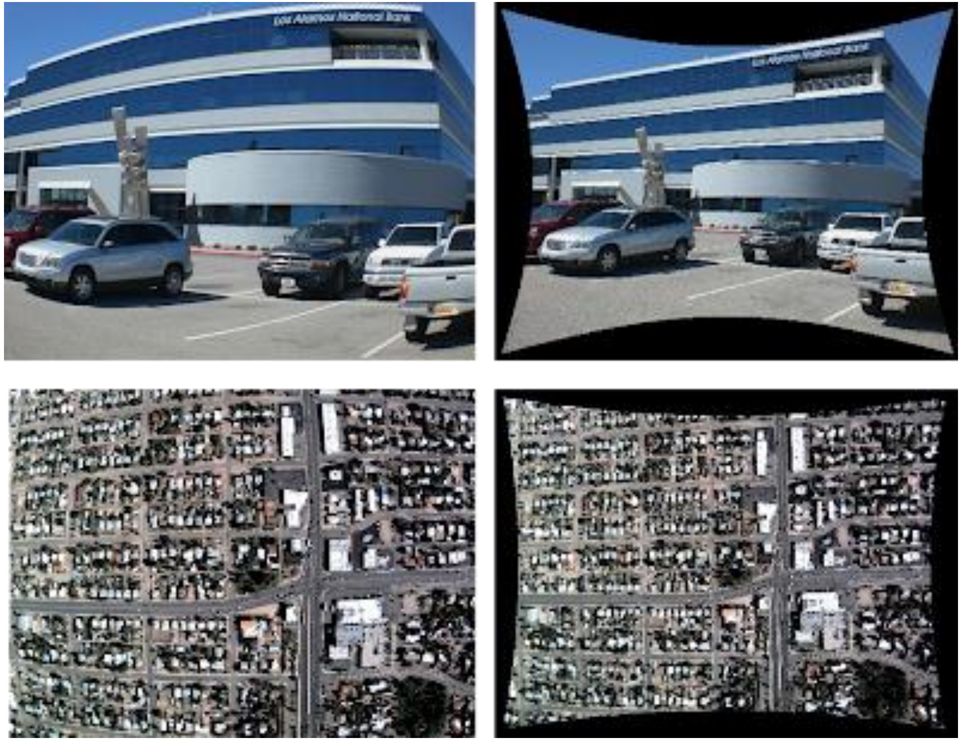
畸变的投影点坐标 (x'_d, y'_d)

中心距离 $r^2 = x'^2 + y'^2$

$$x'_d = x'(1 + \kappa_1 r^2 + \kappa_2 r^4 + \kappa_3 r^6 + \cdots)$$

$$y'_d = y'(1 + \kappa_1 r^2 + \kappa_2 r^4 + \kappa_3 r^6 + \cdots)$$

径向畸变矫正



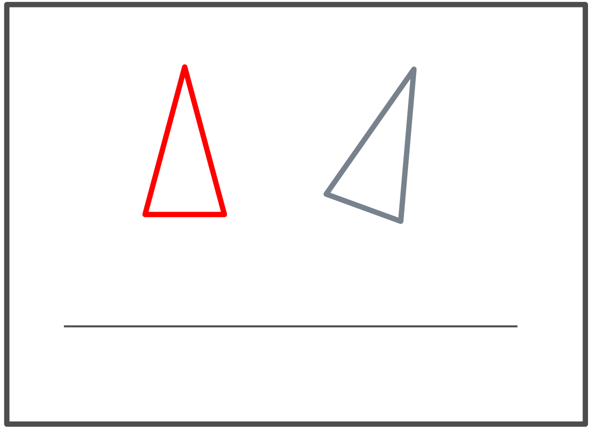
图片来源：https://sites.google.com/site/homeofmiao/home/radial-distortion

切向畸变

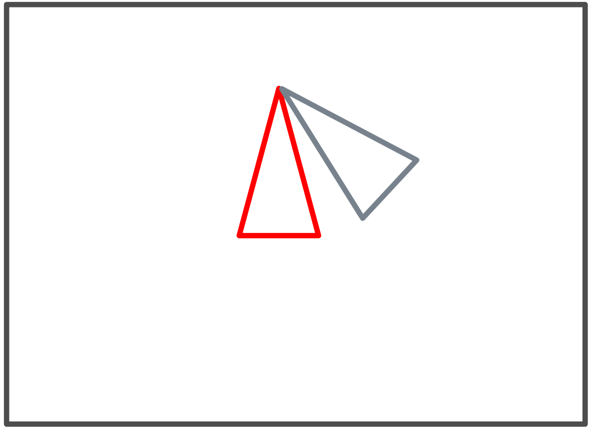
切向畸变主要是由于透镜和成像平面不严格平行造成的

$$x_d' = x'(1+\kappa_1 r^2 + \kappa_2 r^4 + \cdots) + 2p_1 x'y' + p_2(r^2 + 2x'^2)$$
$$y_d' = y'(1+\kappa_1 r^2 + \kappa_2 r^4 + \cdots) + p_1(r^2 + 2y'^2) + 2p_2 x'y'$$

单应性矩阵



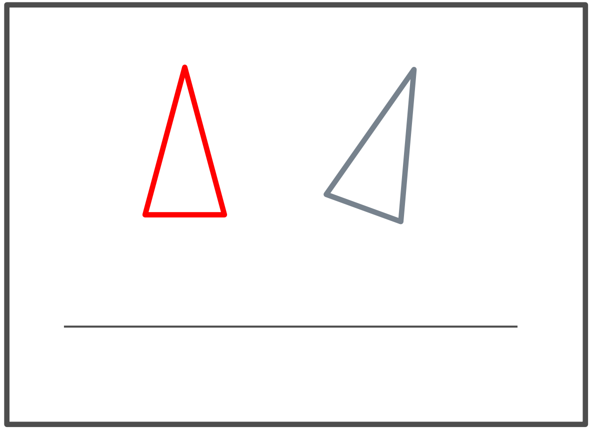
拍摄平面

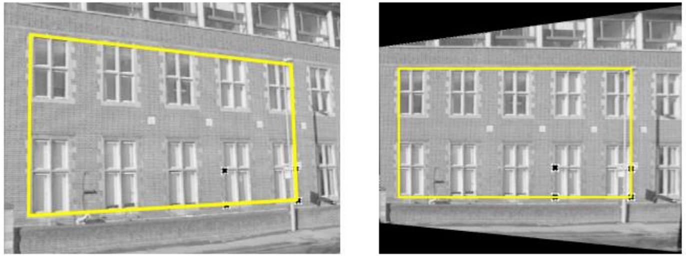


纯旋转

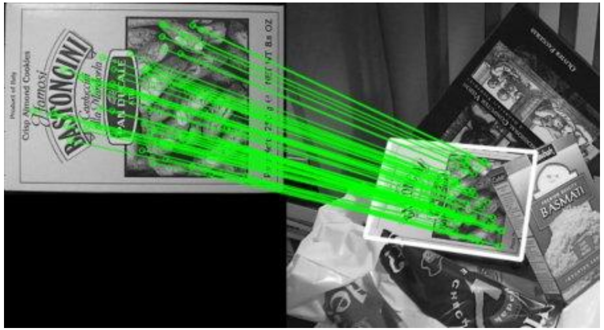
$$c\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \\ h_4 & h_5 & h_6 \\ h_7 & h_8 & h_9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

单应性矩阵



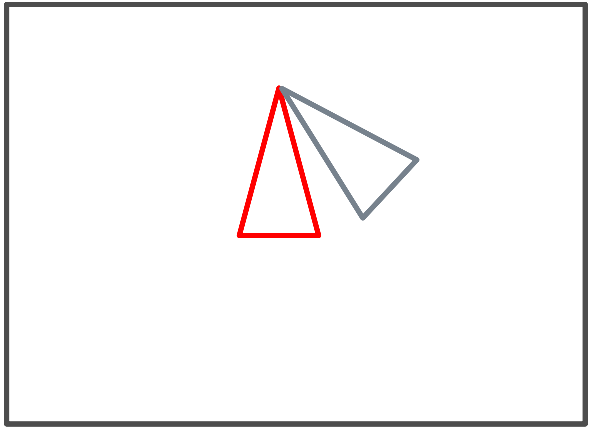


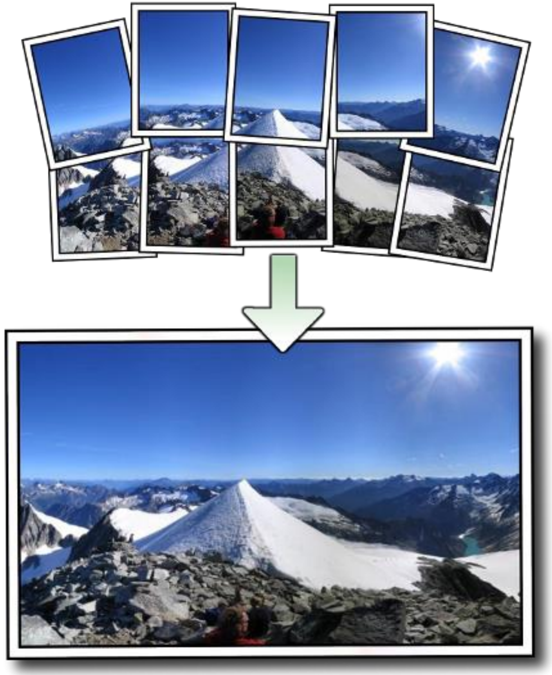
from Hartley & Zisserman



From OpenCV Tutorial

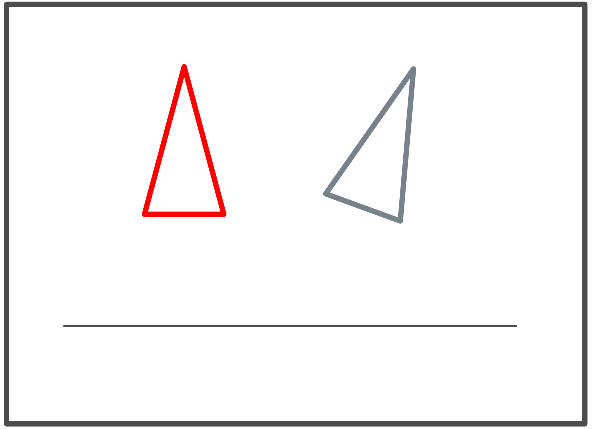
单应性矩阵





From AutoStitch

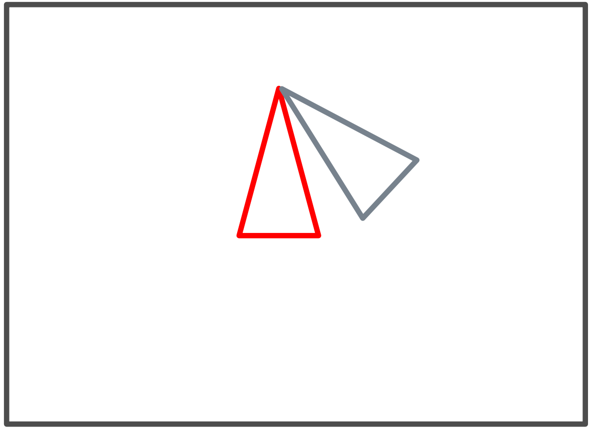
单应性矩阵



拍摄平面

$$\pi = \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ d \end{bmatrix}$$

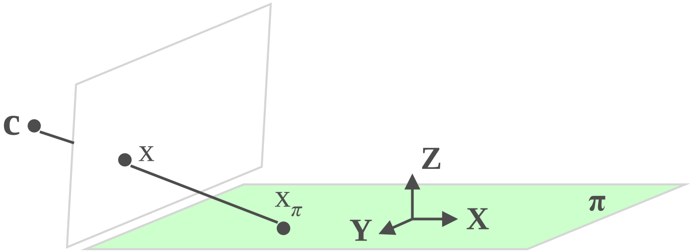
$$H = K_2(R - \frac{tn}{d})K_1^{-1}$$



纯旋转

$$H = K_2 R K_1^{-1}$$

单应性矩阵：平面射影变换



选择该平面作为世界坐标系的Z=0的平面，那么3×4的摄影矩阵可以被归约：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{14} \\ p_{21} & p_{21} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix}$$

其中该3×3 的矩阵代表了从一个平面到另一个平面的变换

单应性矩阵：平面射影变换

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{x}' = H\mathbf{x}$, 其中 H 是一个 3 × 3 非奇异的齐次矩阵.

- 在使用透视相机成像时，这是一种常用的变换来构建世界和成像平面之间的关系
- 平面射影变换又被称为具有单应性或共线性
- H 拥有 8 个自由度

多视图几何

- 运动恢复结构
  - 从多张图片或者视频序列中自动恢复相机参数和场景三维结构

Noah Snavely, Steven M. Seitz, Richard Szeliski.
"Photo tourism: Exploring photo collections in 3D". 2016.

双视图几何

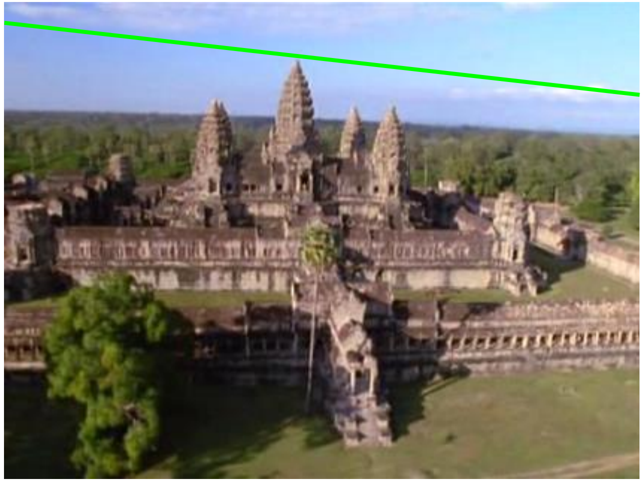
3D???

双视图几何

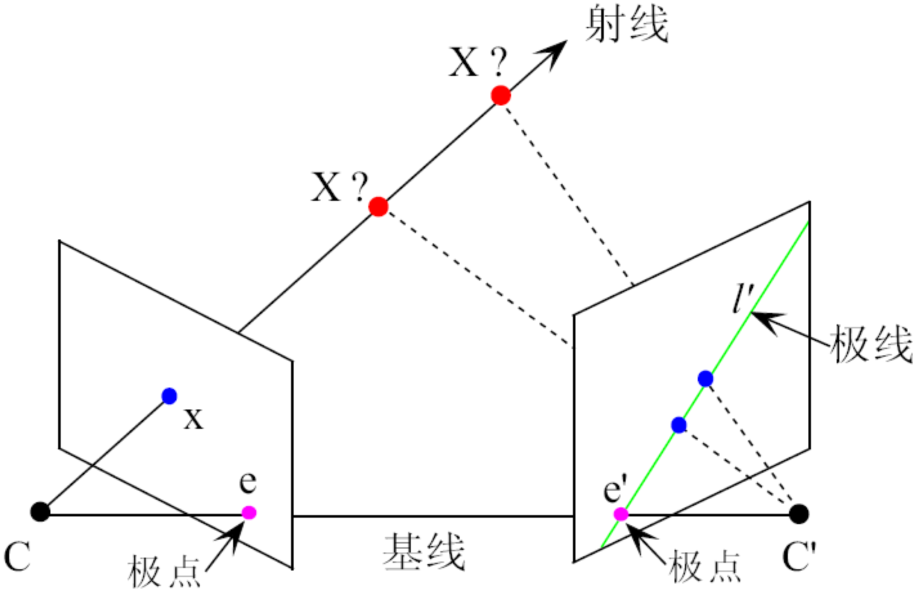
3D???

双视图几何

3D: 极线几何



极线几何



$$\hat{\mathbf{x}}'^{\top} F \hat{\mathbf{x}} = 0$$

向量外积的矩阵表示

向量的外积 $\mathbf{v}\times\mathbf{x}$ 可以被表示为矩阵乘法形式

$$\mathbf{v}\times\mathbf{x}=[\mathbf{v}]_\times\mathbf{x}$$

其中

$$[v]_\times=\begin{bmatrix}0 & -v_z & v_y\\ v_z & 0 & -v_x\\ -v_y & v_x & 0\end{bmatrix}$$

- $[\mathbf{v}]_\times$ 是一个 3 × 3 秩为2的斜对称矩阵.
- $\mathbf{v}$ 是矩阵$[\mathbf{v}]_\times$的零向量：$\mathbf{v}\times\mathbf{v}=[\mathbf{v}]_\times\mathbf{v}=\mathbf{0}$.

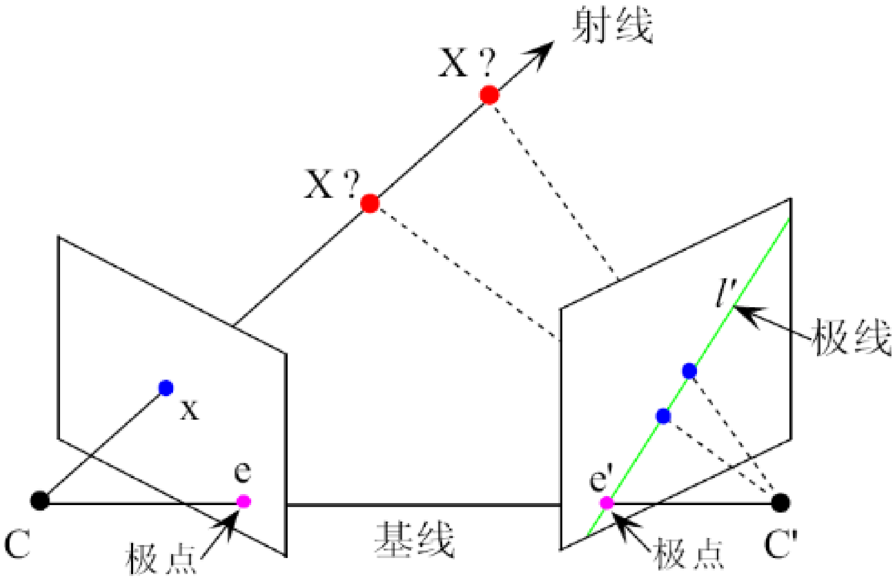
基础矩阵

- 只跟两个视图的相对相机姿态和内参有关

$$F = K_2^{-T}[t]_\times R K_1^{-1}$$

- F 是一个3 × 3 秩为2的矩阵
- Fe = 0
- 7个自由度
- 最少7对匹配点就可以求解
  - 七点法
  - 八点法

OpenCV: cvFindFundamentalMat()



八点法求解基础矩阵

根据对极几何关系，基本矩阵 F 满足

$$\hat{x}'^{\top} F \hat{x} = 0$$

若设 $\mathbf{f} = (f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{21}, f_{22}, f_{23}, f_{31}, f_{32}, f_{33})^{\top}$

那么对极几何关系又可以写作：

$$\begin{pmatrix} \hat{x}'_1\hat{x}_1 & \hat{x}'_1\hat{x}_2 & \hat{x}'_1 & \hat{x}'_2\hat{x}_1 & \hat{x}'_2\hat{x}_2 & \hat{x}'_2 & \hat{x}_1 & \hat{x}_2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{f} = 0$$

若存在 n 对对应点，F 应满足如下的线性系统：

$$A\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \hat{x}'_{11}\hat{x}_{11} & \hat{x}'_{11}\hat{x}_{12} & \hat{x}'_{11} & \hat{x}'_{12}\hat{x}_{11} & \hat{x}'_{12}\hat{x}_{12} & \hat{x}'_{12} & \hat{x}_{11} & \hat{x}_{12} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{x}'_{n1}\hat{x}_{n1} & \hat{x}'_{n1}\hat{x}_{n2} & \hat{x}'_{n1} & \hat{x}'_{n2}\hat{x}_{n1} & \hat{x}'_{n2}\hat{x}_{n2} & \hat{x}'_{n2} & \hat{x}_{n1} & \hat{x}_{n2} & 1 \end{pmatrix} \mathbf{f} = 0$$

基础矩阵

- **f** 为 9 维向量，若要有解，rank(F) 至多为 8
  - 在 rank(F) = 8 时，**f** 的方向是唯一的
  - 通过至少 8 对对应点，可恰好得到使 **f** 方向唯一的 F
- **f** 为 F 的右零空间的基向量，可用 SVD(F) 求得
- 当对应点超过8对时且可能有外点时，我们一般先使用RANSAC方法来求解并筛选出内点，并求解得到最优的F^*

基础矩阵

- 在得到初解后，我们一般还要根据所有内点对F做非线性优化，其中g为距离度量函数， x_i, x_i'为匹配点对：

$$\underset{F}{\operatorname{argmin}} \sum_i g(x_i, x_i')$$

- 一般使用LM算法来优化该目标函数
- 常见的两种距离度量
  - 辛普森距离
  - 对称极线距离

基础矩阵

- 一阶几何误差(first-order geometric error)，又名辛普森距离(Sampson distance）：
  - 令 $e = x_i'^T F x_i$，$J = \frac{\delta(x_i'^T F x_i)}{\delta x_i}$则第 i 对对应点的辛普森距离为

$$\frac{e^T e}{JJ^T} = \frac{(x_i'^T F x_i)^2}{JJ^T} = \frac{(x_i'^T F x_i)^2}{(F x_i)_1^2+(F x_i)_2^2+(F^T x_i'^T)_1^2+(F^T x_i'^T)_2^2}$$

- 对称极线距离(symmetric epipolar distance)，它形式上与辛普森距离很像，但是度量的是点到极线的距离：

$$\frac{(x_i'^T F x_i)^2}{(F x_i)_1^2+(F x_i)_2^2}+\frac{(x_i'^T F x_i)^2}{(F^T x_i'^T)_1^2+(F^T x_i'^T)_2^2}$$

谢 谢！